

A. DE MESQUITA
M. ENNASSEF
L. ROYE

RÉFLEXION SUR LA FORMATION MATHÉMATIQUE DES PROFESSEURS DES ÉCOLES : ILLUSTRATION DE QUELQUES PRINCIPES DE BASE¹

Résumé : Les futurs Professeurs des Écoles (PE) sont, à leur entrée en IUFM, issus de parcours universitaires très diversifiés, et certains de ces parcours n'ont que des liens faibles avec les mathématiques. La prise en compte de ces diversités est à la base de ce travail. L'objet de cet article est d'exposer trois principes de base concernant la formation en mathématiques des PE : *la problématisation, l'analyse de la tâche et l'analyse d'erreurs des élèves, l'analyse épistémologique*. Pour cela, nous nous appuierons sur deux champs mathématiques : les constructions géométriques et la mesure des grandeurs.

Mots-clés : Formation des maîtres - problématisation - analyse de la tâche - analyse d'erreurs - épistémologie - mesure des grandeurs - constructions géométriques.

Pour un esprit scientifique, toute connaissance est une réponse à une question.

G. Bachelard

Les futurs professeurs des écoles (PE) présentent, à leur entrée en IUFM des caractéristiques bien spécifiques, en ce qui concerne leur formation antérieure et leur expérience professionnelle. En effet, ces étudiants² sont issus de filières diversifiées, de niveau premier cycle universitaire ou licence. Ils peuvent avoir accompli des DEUG lit-

¹- Travail effectué dans le cadre du projet soutenu par l'IUFM Nord-Pas de Calais : Recherche subventionnée par l'IUFM Nord-Pas de Calais, projet 3/93/009.

²- Dans cet article, nous utilisons le terme « étudiant » pour nous référer aux futurs PE, étudiants-stagiaires en première année d'IUFM ; le terme « élève » est réservé aux élèves de l'école élémentaire.

téraires ou scientifiques, des licences littéraires, scientifiques, en sciences de l'éducation, en psychologie ou en sociologie. D'autres ont des diplômes technologiques. Dans la plupart des cas, ces cursus n'ont que des liens faibles avec les mathématiques. Au niveau de l'expérience professionnelle, plusieurs cas de figure sont possibles : ces étudiants sont des jeunes sans expérience, poursuivant leur formation en IUFM immédiatement après leur licence, soit des personnes ayant déjà une vaste expérience professionnelle dans différents domaines dont l'enseignement.

Ces constatations ont été le point de départ de notre réflexion sur les connaissances mathématiques et didactiques effectivement importantes pour les futurs PE, ainsi que sur des méthodologies qui pourraient être convaincantes et efficaces pour ces étudiants, lesquelles nous semblent relever plutôt des méthodologies de l'enseignement d'adultes que des pédagogies habituelles.

Tous ceux qui sont impliqués dans la formation des maîtres s'accordent sur le fait que les PE doivent acquérir des connaissances mathématiques et didactiques qui ne se limitent pas à préparer ou à observer des séquences pédagogiques, pas plus qu'à résoudre des équations ou même faire des constructions géométriques. Il leur faut en même temps acquérir des savoirs mathématiques en travaillant sur des problèmes permettant une bonne compréhension des notions à enseigner dans le premier degré, avec en particulier, un travail systématique sur les différents cadres d'intervention de ces notions.

A notre avis, il est important d'amener les PE à structurer sous un nouvel éclairage, avec une motivation différente, des connaissances mathématiques qui pourraient n'être qu'éparses, diffuses ou perdues dans les souvenirs. La structuration des savoirs acquis par les résolutions de problèmes complexes ainsi que celle des champs conceptuels³ mathématiques liés à l'enseignement à l'école élémentaire nous semble être une base indispensable au sérieux d'une réflexion sur les programmes scolaires, sur les travaux actuels de la didactique des mathématiques et sur les productions mathématiques des enfants.

Selon nous, une telle structuration est possible si l'on s'appuie sur trois principes.

³ - Au sens de G. VERGNAUD (1981, 1991), c'est-à-dire l'ensemble des tâches dont le traitement implique des concepts et des procédures de plusieurs types en étroite connexion.

Un premier principe, essentiel, est associé au souci d'amener les étudiants à développer une activité mathématique authentique, sur des contenus plus ou moins liés aux programmes scolaires. Ce travail permettra aux futurs PE d'avoir une vision des mathématiques en tant que processus de pensée, plutôt que celle d'un édifice achevé, limité à des résultats ou des calculs. Ceci passe la pratique courante de la *problématisation* dans des situations de résolutions de problèmes. Par problématisation nous entendons l'opération par laquelle un sujet transforme une question qu'il se pose ou qui est posée en problèmes⁴ mathématiques susceptibles d'être résolus en utilisant des énoncés généraux de la théorie. La problématisation aboutit à la définition d'un espace de recherche dans lequel s'inscriront les tentatives de résolution, et éventuellement la remise en cause de la représentation que l'on s'en était faite. En même temps, cette problématisation peut faciliter les stratégies d'auto-contrôle nécessaires à la validation de la démarche. Le recours à la problématisation peut motiver fortement les PE en leur faisant éprouver le besoin d'acquérir de nouvelles connaissances. Ce développement de concepts mathématiques, basé sur l'exploitation de nouvelles situations complexes permettra aux PE de choisir des tâches significatives et suffisamment riches pour les apprentissages des enfants. Ce travail leur donne ainsi des moyens de comprendre le sens (et des limites) de l'enseignement des mathématiques à l'école. Pour ces raisons, le travail mathématique centré sur les problèmes nous semble être une entrée privilégiée dans une structuration des connaissances mathématiques.

Un deuxième principe repose à la fois sur *l'analyse des tâches* et sur *l'analyse d'erreurs* d'élèves. L'analyse d'une tâche conduite du double point de vue, mathématique et cognitif vise l'anticipation des difficultés qui pourraient apparaître dans la résolution de cette tâche, elle se base sur l'identification des démarches mathématiques liées à sa résolution. Ce principe résulte de l'idée qu'une analyse de la tâche, d'un point de vue mathématique, est indissociable d'une réflexion d'ordre psychologique nécessaire pour comprendre l'existence d'éventuelles difficultés liées à la résolution de cette tâche. En effet, ces analyses permettent de déceler pourquoi la présence (ou absence)

⁴ Toute question mathématique qui exige une réponse adaptée et qui n'est pas disponible d'avance.

de certaines particularités dans une tâche donnée entraîne des difficultés que son absence (ou présence) n'entraînerait pas. L'analyse de la tâche, faite a priori, a un complément naturel dans l'identification et l'interprétation d'erreurs d'élèves. Ces analyses peuvent faire ressortir la nécessité d'enrichir les connaissances mathématiques du futur maître, pour identifier et pouvoir réagir devant des erreurs faites par des élèves. Cet éclairage donnera aux futurs maîtres des éléments solides d'analyse, en leur permettant de maîtriser les mathématiques enseignées à l'école et en établissant un lien indispensable entre les connaissances à acquérir et les tâches du futur enseignant. C'est dans ce sens que ces analyses constituent un point d'ancrage important dans notre approche.

Un troisième principe que nous défendons est celui de *l'interaction entre les connaissances mathématiques et épistémologiques*, d'un côté, et entre *les connaissances didactiques et mathématiques*, d'un autre côté⁵. Certaines notions mathématiques de base, par leur complexité, ne doivent pas être séparées d'éléments d'épistémologie pouvant éclairer des difficultés conceptuelles liées à ces notions. En effet, l'épistémologie, en tant que « *l'étude des circonstances qui ont permis la production de la connaissance scientifique, ... cherche à décrire et à expliquer l'élaboration des outils intellectuels qui permettent à l'homme de décrypter, comprendre et transformer la nature* » (G. GLAESER, 1980), peut donner un nouvel éclairage à l'apprentissage des notions mathématiques. Comme le montre M. ARTIGUE (1990), l'analyse épistémologique aide la didactique à contrôler les relations entre le savoir mathématique, formel, objet d'étude des mathématiciens, et les savoirs — mathématiques eux aussi — qui sont objets d'étude de la didactique des mathématiques, construits et utilisés pour et par les enseignants. L'idée d'associer l'épistémologie et la formation des maîtres n'est pas neuve, mais il n'y a pas d'études concrètes sur sa mise en place (A. MESQUITA, à paraître).

La prise en compte de ces trois principes peut permettre un travail spécifique et rigoureux dans des domaines mathématiques spécialement liés aux contenus mathématiques à l'école élémentaire : telle est notre hypothèse.

⁵ - Dans cet article, nous nous limiterons à l'interaction entre les connaissances mathématiques et épistémologiques.

Dans ce qui suit, nous essayons d'illustrer ces trois principes en nous appuyant sur des exemples issus de différents domaines des mathématiques.

I. UN EXEMPLE DE PROBLÉMATISATION DANS UNE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE PLANE

Problématiser c'est transformer une difficulté en problème à résoudre. C'est réagir lucidement, méthodiquement dans une situation qui résiste à l'analyse, c'est éviter de vivre une difficulté dans l'angoisse, c'est se plonger dans la résolution.

Par « problématisation en mathématiques », nous entendons ici l'opération par laquelle un individu transforme, par le raisonnement, une question complexe pour lui en problèmes mathématiques qu'il pourra résoudre, en utilisant des énoncés généraux de la théorie.

La situation

Découper deux disques identiques les plus grands possibles dans une feuille de papier de format 21 x 29,7. La première réaction à cette proposition peut être de plier la feuille suivant sa petite médiane, ensuite de découper deux disques d'un même coup, en suivant avec les ciseaux le tracé d'un cercle tangent aux deux grands bords du nouveau rectangle obtenu par le pliage. Mais la chute de papier semble être importante (fig. 1).

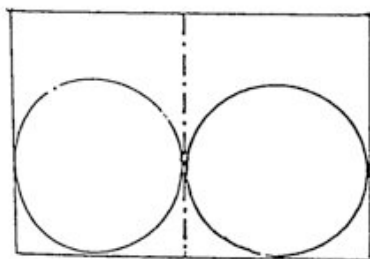


Figure 1

(Échelle $\frac{1}{6}$)

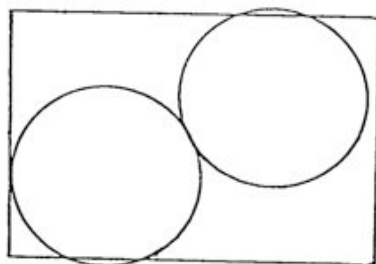


Figure 2

Interprétation de la situation en mathématiques.

Formulation d'un énoncé

Quittant alors l'idée du pliage, on peut penser à découper séparément les deux disques « en diagonale » (fig. 2) et, dans ce cas, les imaginer comme tangents chacun à deux côtés consécutifs du rectangle, et symétriques par rapport au centre de celui-ci. Mais les essais de tracé de deux cercles répondant aux conditions énoncées ne donnent pas de résultat satisfaisant, et justement parce qu'il faut construire deux cercles. Tout porte à croire que ceux-ci, pour couvrir la plus grande surface dans une feuille, doivent être tangents en le centre du rectangle.

A ce niveau de l'analyse, la recherche s'oriente. Toutes les conjectures faites jusqu'ici peuvent être coordonnées en un énoncé transformant la question initiale en un énoncé mathématique :

« Soit un rectangle $ABCD$ de dimensions 21 cm et $29,7\text{ cm}$. Construire deux cercles symétriques par rapport au centre O de ce rectangle, tangents en ce point O et tangents l'un aux deux côtés $[AB]$ et $[AD]$, l'autre aux côtés $[CB]$ et $[CD]$ de ce rectangle (fig. 3). »

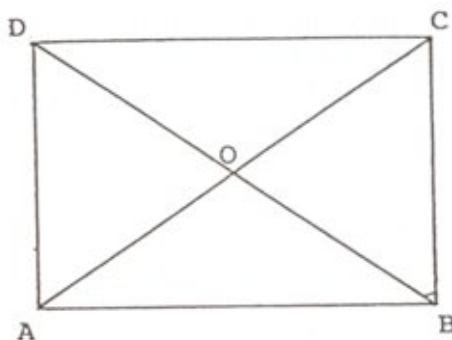


Figure 3

Cet énoncé peut lui-même faire problème à qui l'a produit ou à qui se l'est approprié, selon qu'une procédure de résolution lui est disponible d'emblée ou non. Dans ce dernier cas, il s'agit d'un problème mathématique : problème, puisque sa résolution n'est pas immédiate et, mathématique, puisque la recherche de solution va être entreprise dans l'un des cadres des mathématiques en utilisant les définitions, propriétés et théorèmes de la théorie. On se trouve alors devant un

problème de construction géométrique.

Recherche d'une procédure de construction géométrique

Pour résoudre ce problème on peut penser à utiliser la méthode analyse-synthèse. Cette méthode consiste à se donner d'abord une figure d'étude réalisée à main levée ou à l'aide d'instruments du dessin et illustrant les conditions imposées, puis à conduire une analyse de cette figure pour en déduire, si c'est possible, une procédure aboutissant à la construction effectivement demandée.

A. Analyse

Par exemple dans le problème qui nous occupe, on pourrait d'abord construire un angle droit ($[Au]$, $[Av]$), puis un cercle (I') tangent aux deux côtés de cet angle et enfin placer arbitrairement un point O' sur ce cercle, en tenant compte toutefois que le symétrique de A par rapport à ce point O' devra être le sommet d'un rectangle contenant le cercle. La suite de cette construction « à l'envers » se déduit des éléments ainsi construits dans une symétrie par rapport à O' (fig. 2). Soit $A'B'C'D'$ le rectangle obtenu.

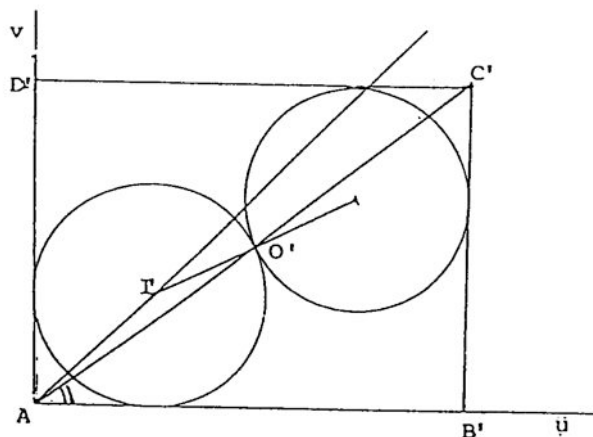


Figure 4

Puisque le rayon du cercle de centre I' a été choisi arbitrairement, les dimensions du rectangle ($A'B'C'D'$) ont peu de chances d'être 29,7 cm et 21 cm. Pourtant, par un même type de construction,

on peut obtenir un rectangle dont les dimensions des côtés sont dans le rapport $\frac{29,7}{21}$.

En effet, traçons :

- 1° La diagonale [AC] du rectangle (ABCD) (figure 5, échelle $\frac{1}{3}$),
- 2° Un cercle de centre I' tangent aux demi-droites [AB) et [AD). On désigne par O' le point de l'intersection de ce cercle avec la diagonale [AC], le plus éloigné de A sur cette diagonale,
- 3° Le symétrique C' de A par rapport à O',
- 4° Les projections orthogonales D' de C' sur [AD) et B' de C' sur [AB),
- 5° Enfin le rectangle A'B'C'D'.

Les rectangles (A'B'C'D') et (ABCD) se correspondent dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AO}{AO'}$ et il en est de même des cercles (I') et (I), le cercle (I) étant le cercle cherché. Il en résulte que I est le point de l'intersection de la bissectrice de l'angle droit ([AB), [AD)) avec la parallèle à (I'O') passant par O.

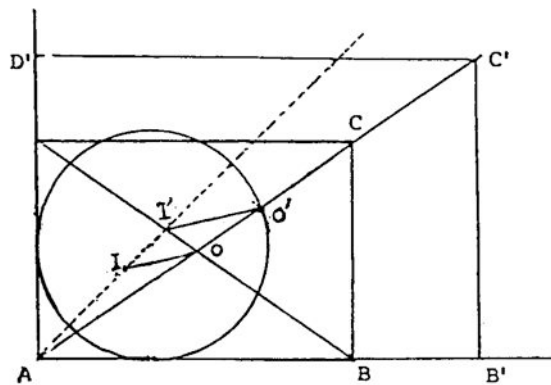


Figure 5

L'idée a été de construire une figure d'étude et de la réduire.
(fig. 6)

On remarque maintenant que le cercle (I) cherché peut être déduit par une homothétie de centre A d'un cercle arbitraire tangent aux deux côtés [AB] et [CD] du rectangle donné (ou si l'on veut à deux bords consécutifs de la feuille de papier), ce qui va simplifier la construction.

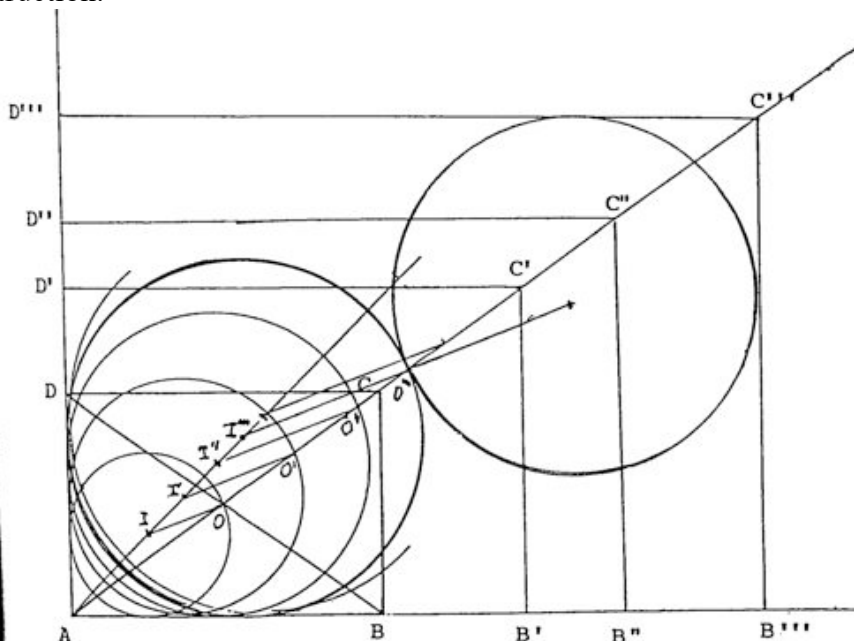


Figure 6

$$\boxed{\frac{AD}{AB}} = \boxed{\frac{AD'}{AB'}} = \boxed{\frac{AD''}{AB''}} = \boxed{\frac{AD'''}{AB'''}} = \dots\dots\dots = \boxed{\frac{21}{29,7}}$$

B. Synthèse

Description de la construction (fig. 7) :

- On trace un cercle de rayon arbitraire et centré en I' sur la bissectrice [Ax] de l'angle ([AD), [AB)). Ce cercle coupe la demi-droite [AO) en deux points M et M' (on choisit de désigner par M' le point intérieur à [AM]).

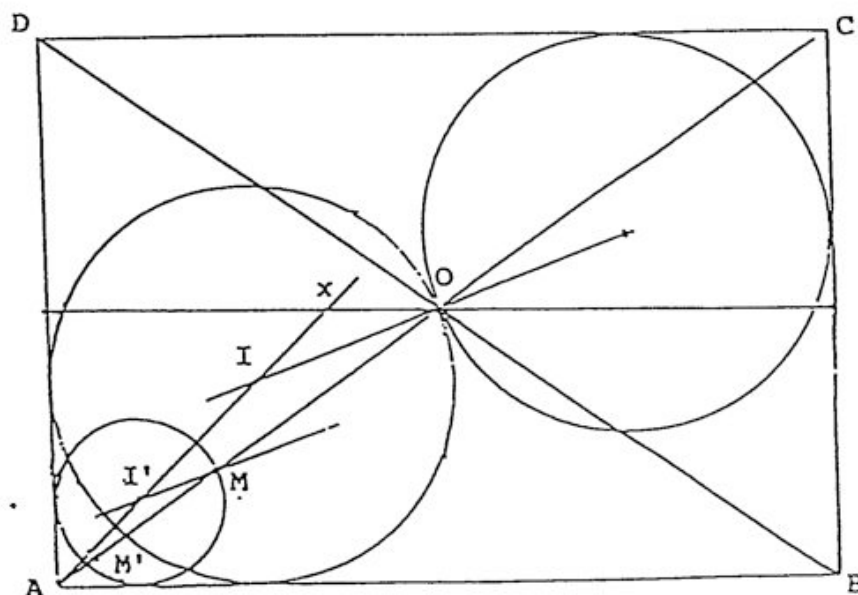


Figure 7

- De M on trace la parallèle à (I' M), elle coupe la bissectrice [Ax) en I. Le cercle (I, IO) est l'image du cercle (I') dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AO}{AM}$, il est équidistant de O et des droites (AB) et (AD).

- Il existe un deuxième cercle ayant les mêmes propriétés, son centre i est le point de l'intersection de $[Ax)$ avec la parallèle à $(I'M)$ passant par O , ce cercle (i, iO) est l'image du cercle (I') dans l'homothétie $(A, \frac{AO}{AM})$.

- Si les cercles (I) et (i) conviennent, il restera à construire leurs symétriques respectifs par rapport à O.

Discussion : Les cercles (I) et (i) sont-ils intérieurs au rectangle ABCD ? (c'est un nouveau problème).

Dans la famille des cercles tangents aux demi-droites [AB) et [AD), l'idée est ici de comparer les rayons des cercles (I) et (i) au rayon du cercle tangent à trois côtés consécutifs du rectangle. (fig. 8)

Soit (mn) la médiane du rectangle (ABCD) parallèle à (AB) et J le point de cette médiane tel que $mJ = \frac{21}{2}$. Le cercle (J, $\frac{21}{2}$) est tangent à [AD], [AB] et [DC]. Puisque $\frac{29,7}{2} < 21$, ce cercle tangent en m à [AD] recoupe la médiane (mn) en un point K tel que $mO < mK$ et la diagonale [AC] en un point N intérieur au segment [OC]. On a donc $\frac{AO}{AN} < 1$ puis O est intérieur au cercle (J, $\frac{21}{2}$) et que A extérieur à ce cercle.

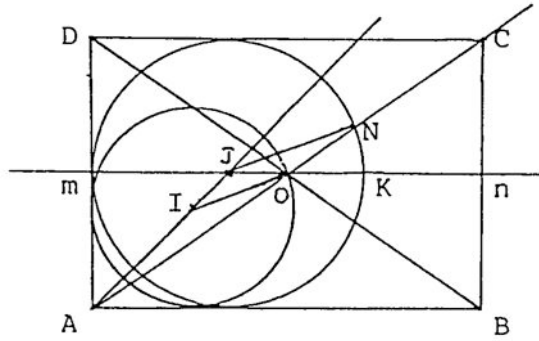


Figure 8

Or le cercle (I, IO) est l'image du cercle (J, $\frac{21}{2}$) dans l'homothétie $(A, \frac{AO}{AN})$, il en résulte que : $\frac{IO}{JN} = \frac{AO}{AN}$. Comme $JN = \frac{21}{2}$ et que $\frac{AO}{AN} < 1$, on a : $IO < \frac{21}{2}$. Par hypothèse on a aussi $21 < 29,7$ donc $IO < \frac{29,7}{2}$.

Le cercle (I) passant par O et tangent aux côtés [AB] et [AD] du rectangle (ABCD) est donc intérieur à ce rectangle.

Le cercle (i) n'est pas solution du problème. En effet soit N' le point d'intersection autre que N du cercle (J, $\frac{21}{2}$) avec la diagonale [AC] du rectangle, l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{AO}{AN}$, transforme le cercle (J, $\frac{21}{2}$) en le cercle de centre i et de rayon iO. Un raisonnement comme le précédent montrerait que $\frac{iO}{JN'} > 1$ et donc que $iO > \frac{21}{2}$, ce qui signifie que le cercle (i, iO) est extérieur au rectangle (ABCD).

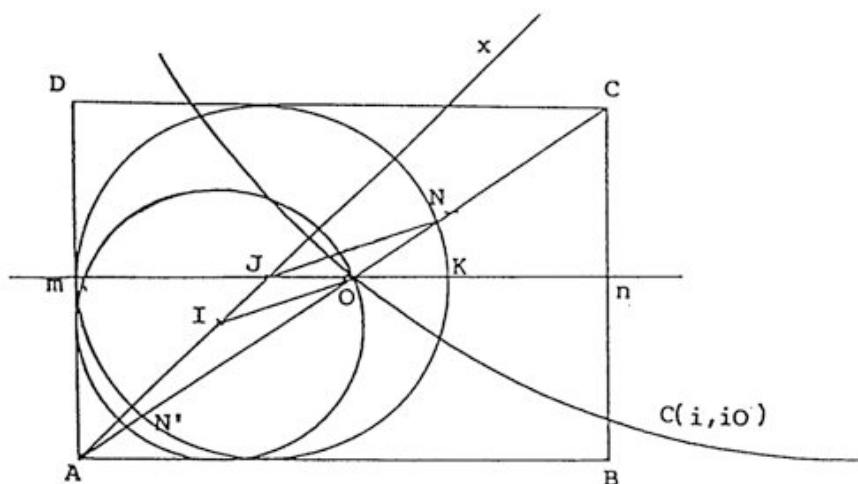


Figure 9

Il reste à démontrer que le cercle (I) et son symétrique sont les plus grands cercles de même rayon que l'on peut découper dans une feuille de papier de format 21 x 29,7 cm.

C'est un nouveau problème qui résiste a priori à l'analyse. Sa solution vient de l'idée de *comparer le cercle (I) au plus grand cercle intérieur au rectangle*, c'est à dire au cercle $(J, \frac{21}{2})$ déjà utilisé précédemment. Tout cercle intérieur au rectangle peut être transformé par isométrie en un cercle tangent à deux côtés consécutifs du rectangle, il peut donc être considéré comme homothétique de $(J, \frac{21}{2})$ dans une homothétie de centre A et de rapport inférieur à 1 d'après la démonstration ci-dessus. Or tout cercle de rayon supérieur au rayon de (I) et inférieur à $\frac{29,7}{2}$ coupe le segment [On].

Le cercle (I) et son symétrique par rapport à O sont les cercles de même rayon les plus grands possibles que l'on peut découper dans une feuille de papier de format 21 cm x 29,7 cm.

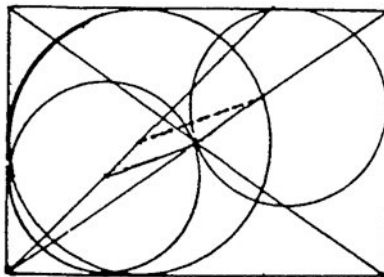


Figure 10

Analyse de ce premier exemple :

la problématisation est un processus

On s'est placé ici dans l'état d'un étudiant ayant quelque souvenir de l'homothétie via le théorème de Thalès et qui, se rappelant de la méthode analyse-synthèse, désire construire une figure d'étude pour faciliter ses investigations. C'est volontairement que nous avons décrit longuement l'analyse de la construction. Bien sûr on aurait pu, plus directement, penser à construire le plus grand cercle intérieur au rectangle donné, sans se préoccuper du symétrique de ce cercle par rapport à O , puis construire son homothétique passant par O et tangents à deux côtés consécutifs du rectangle, on aurait pu aussi considérer le point I comme un point de l'intersection de deux paraboles, mais voilà !

Revenons à la situation. Au niveau de l'analyse didactique et au-delà de l'interprétation mathématique initiale, la difficulté majeure de la résolution du problème réside dans le fait de devoir dissocier, pour les étudier séparément, les deux conditions imposées au cercle (I) :

- a. être tangents à deux côtés consécutifs du rectangle,
- b. passer par O .

C'est l'interdépendance de celles-ci qui fait « tourner en rond », et qui résiste à l'analyse. Cette distinction opératoire mène ici à l'homothétie par laquelle, comme le dit R. BOIREL (1955), « *on substitue à l'inconnu qui paralyse l'esprit du connu arbitraire* ». C'est ainsi

que dans l'analyse, on passe d'un rectangle que l'on a su construire directement à son homothétique, lequel donne en fait la solution. On dépasse ici le niveau de difficulté du cadre des constructions de points qui apparaissent comme intersection de deux « lieux géométriques » directement constructibles, on est dans le cadre plus général des problèmes géométriques nécessitant des *constructions auxiliaires*.

La problématisation ne suit pas un long fleuve tranquille... Dans ce qui précède nous avons mis en évidence les étapes de la problématisation :

- a. la conjecture initiale menant à un problème mathématique,
- b. le problème de la construction d'une figure d'étude et la démarche heuristique propre qui l'accompagne pour parvenir au « simple » (L. ROYE, 1993, p. 142),
- c. le difficile problème portant sur l'intériorité des deux disques dans le rectangle,
- d. le problème du maximum de la longueur du rayon commun aux deux disques,
- e. le problème important concernant la synthèse suivant l'analyse de la figure d'étude et qui mène à se questionner sur la procédure la plus simple pour construire.

Nous pensons que la problématisation n'est pas seulement le fait du passage d'aspects de la réalité à des problèmes mathématiques, mais qu'elle marque aussi des temps de la résolution de ces problèmes, par exemple ici : l'analyse d'une figure d'étude, la construction géométrique proprement dite, la démonstration que le résultat obtenu vérifie bien les conditions imposées, la discussion sur l'existence des solutions et leur nombre, l'amélioration éventuelle de la procédure.

Dans notre exemple, la problématisation ne se fait pas d'un seul coup, mais par touches successives. Chaque difficulté rencontrée marque une étape d'abord faite de conjectures au cours desquelles le problème mathématique prend forme, puis faite de la formulation d'un énoncé de problème mathématique.

La transformation d'une question qui se pose en énoncé de problème mathématique ouvre la recherche d'une solution à un connu théorique garantissant, si ce n'est une réponse immédiate entrevue, au moins une démarche logique permettant de construire celle-ci, même

s'il faut remettre en question l'énoncé initial. Souvent d'ailleurs, la résolution du problème mathématique issue de la question initiale sera décomposée en de nouveaux problèmes mathématiques plus simples, compte tenu du niveau de connaissance de celui qui recherche.

Reste que *les différentes étapes de la problématisation doivent être marquées, élucidées puis analysées a posteriori* pour que chaque étudiant développe ses capacités d'analyse, ses capacités à structurer et son esprit critique. Reste donc aussi, la latitude de médiation du formateur et/ou de l'interaction sociale entre pairs, et cela relève du niveau des étudiants, du contrat didactique mais aussi du « style cognitif » de chaque formateur.

Pour un groupe en formation, ce qui nous intéresse plus particulièrement ici, la transformation des difficultés en un énoncé général collectif explicité devrait être le produit des conjectures individuelles.

Au niveau cognitif, c'est « la méthode par homothétie » dans les constructions géométriques qui est visée ici. Cette méthode, et plus généralement « la méthode de similitude » (au sens où l'entend Petersen, 1880), génère une importante classe de situations, celles où :

- les données ne concernent que des angles ou des rapports de longueurs,
- la figure à construire doit avoir une position déterminée par rapport à des courbes ou à des points donnés, « *il faut faire abstraction de cette condition, de manière que l'on n'ait plus qu'un système de figures semblables et semblablement placées* » (Julius PETERSEN, 1880).

Le problème des deux disques est une situation de cette classe. Cette situation suffisamment complexe sans être théoriquement trop compliquée, peut efficacement contribuer à ce que les étudiants développent progressivement dans les résolutions de problèmes mathématiques, à la fois, leurs capacités à analyser les données, à organiser rationnellement les procédures et à se déterminer sur la ou les solutions optimales.

Bien d'autres situations de constructions géométriques laissent prévoir a priori une nécessaire problématisation. On peut les considérer du point de vue de leur nature, du point de vue de la résolution des problèmes mathématiques formulés dans l'opération de problématisa-

tion qui les concerne et du point de vue de l'analyse critique qui sera menée a posteriori :

a. du point de vue de leur nature

- les situations où la réponse n'est pas connue à l'avance, par exemple dans la situation des deux disques, la question porte sur la recherche d'un maximum sans que celui-ci ne soit explicité dans l'énoncé ; beaucoup d'énoncés de problèmes mathématiques donnent la réponse à la question posée et demandent une démonstration, cela peut faire disparaître l'opération de problématisation chez l'élève mais de tels énoncés relèvent souvent de la volonté de médiation de l'enseignant et des objectifs qu'il vise,

- les situations de l'espace à trois dimensions qui mènent à des représentations planes où les propriétés des figures n'apparaissent pas perceptivement,

- les situations qui consistent à organiser et à énumérer un nombre fini de cas, par exemple l'étude des positions relatives de deux cercles dans le plan (problèmes exhaustifs in *Repères IREM* n° 4 « La géométrie dans l'enseignement », IREM de Bordeaux).

b. du point de vue de la résolution

- les problèmes de construction géométrique nécessitant des constructions auxiliaires,

- les problèmes de construction géométrique menant à un changement de « cadre »,

- les problèmes de construction géométrique où la réalisation d'une figure d'étude réalisant les conditions imposées ramène au problème initial ; dans ce cas on étudie une autre figure dans laquelle « les relations entre les éléments donnés dans la situation de départ et ceux qu'on cherche ressortent plus commodément », on revient alors au problème initial par isométrie ou par similitude.

Exemple : Soient une droite (D) du plan et deux points A et B d'un même demi-plan de frontière (D). Construire un point M de (D) tel que $AM + MB$ soit minimale.

Si B' est le symétrique de B par rapport à (D) , on étudie $AM + MB'$ et on revient au problème initial par symétrie par rapport à (D) . Il reste alors à démontrer l'unicité de M .

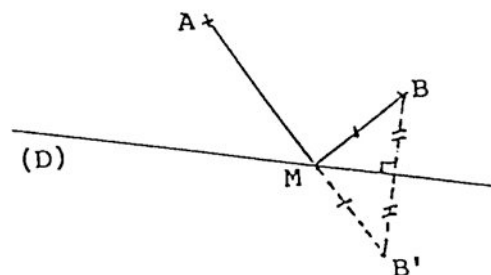


Figure 11

c. Analyse critique a posteriori

- Situations qui consistent à *rechercher les causes d'une erreur* quand celle-ci n'a pas été décelée au cours de la recherche, par exemple non élimination de solutions parasites, oubli d'existence de plusieurs solutions, problèmes de l'unicité de la solution.
- Recherche de contre-exemples prouvant qu'un résultat est faux.

Intérêts de la problématisation mathématique dans la formation des futurs PE

Quelques remarques s'imposent, nous en ferons trois qui nous paraissent essentielles :

1. La situation dans laquelle on problématise peut être de nature mathématique : par exemple, l'analyse d'une question posée dans une situation de nature mathématique peut amener à transformer cette question en problèmes mathématiques qui s'enchaîneront progressivement pour se substituer en définitive au problème initial ; il est possible aussi que la question qui se pose provienne d'une tentative de résolution mathématique qui a échoué, il est alors nécessaire de construire une nouvelle interprétation du problème initial ; enfin, bien que formulée en termes mathématiques, la question posée peut ne pas être comprise comme un énoncé mathématique et en rester au niveau de ce qu'elle était censée mathématiser, par exemple dans une situation de nature géométrique une question peut, a priori, être entendue comme portant sur un dessin illustrant des objets géométriques alors qu'elle

portait sur ceux-ci, il faut alors transformer la représentation qu'on s'était faite.

2. L'opération de problématisation dépend évidemment de l'expérience mathématique de chacun mais peut être aussi le fait d'une recherche personnelle dans les textes de la théorie ou d'une médiation spécifique ou encore de l'interaction sociale.

3. Le degré de généralité des problèmes mathématiques issus des questions initiales dépend du rapport au savoir de leur auteur.

Le développement de la capacité à problématiser nous semble être essentiel dans la formation des futurs professeurs d'école :

- d'abord, parce qu'actualisée dans la résolution de telle ou telle situation complexe, elle permet de se fixer un point de départ, puis d'anticiper au coup par coup et d'apprécier les résultats partiels puis le résultat terminal. On peut penser que c'est au cours de ces différents « moments » que se structurent des connaissances éparses ou que se reconstruisent sur des bases théoriques ce qui pouvait n'être qu'empirique.

- ensuite parce que, considérant l'apprentissage mathématique à l'école comme un processus, il faudra répondre à des questions qui s'apparentent de près à la problématisation, comme : « À quel problème de mathématique renvoie telle question posée dans telle ou telle situation ? », « En quoi consiste mathématiquement telle erreur ? », « À quel théorème mathématique renvoie telle conduite d'enfant ? »

Il nous semble important de permettre au futur PE de développer la capacité à se référer aux concepts, aux propriétés et aux théorèmes généraux de la théorie mathématique puisque :

- l'analyse didactique d'une situation suppose d'abord la définition précise des contenus mathématiques en jeu ;

- la pratique pédagogique à l'école nécessite de construire ou de choisir des situations particulières qui constitueront pour l'élève, les bases de « bonnes » généralisations, c'est-à-dire, en fait des situations qui interdiront des généralisations erronées que l'élève pourrait faire en fonction d'automatismes locaux, par exemple de lier à une position privilégiée d'un côté et de la hauteur qui lui est relative, le calcul de l'aire d'un triangle ;

- cette même pratique nécessite d'identifier, d'expliciter précisément dans les procédures différentes de plusieurs élèves, s'il y a lieu, les invariants opératoires communs (concepts-en-actes et théorèmes-en-actes en rapport avec les concepts et théorèmes explicités dans la théorie).

II. UN EXEMPLE D'ANALYSE D'UNE TÂCHE DE CONSTRUCTION ALGORITHMIQUE ET D'ANALYSE D'ERREURS

Dans cette partie, nous essayons de montrer l'importance de l'analyse d'une tâche et de son association à l'analyse d'erreurs d'élèves. Comme nous l'avons déjà mentionné, l'analyse d'une tâche se base sur l'identification des démarches mathématiques liées à sa résolution et sur l'anticipation de difficultés que cette même tâche peut susciter ; cette analyse peut être enrichie par la confrontation à des erreurs effectivement faites par des élèves.

A notre avis, ces analyses sont indissociables de réflexions d'ordre psychologique nécessaires pour comprendre l'existence de ces difficultés ; ce travail peut permettre au futur maître de mieux comprendre les difficultés des élèves, ce qui est un premier moyen indispensable pour l'aider à trouver des réponses appropriées pour corriger ces mêmes erreurs. Au même temps, il pourra prendre conscience de ses propres connaissances et de leurs éventuelles limitations dans un domaine précis. C'est dans ce sens que ces analyses constituent une entrée idéale dans notre approche ; en particulier, ce travail peut compléter celui développé dans le cadre d'une problématisation.

Essayons d'exemplifier ce que nous venons de dire. Pour cela, nous allons nous centrer sur la situation suivante⁶, à utiliser avec les PE :

Un carré est inscrit dans un triangle s'il a ses quatre sommets sur les côtés du triangle. La figure 12 en donne un exemple :

⁶- Notons que pour nous, avec cet énoncé, il ne s'agit pas d'un problème, au sens considéré dans cet article. Par contre, un énoncé du type : « à l'aide d'une construction géométrique, inscrire un carré dans un triangle » se présente comme une situation à problématiser, telle que nous l'avons considérée ci-dessus.



Figure 12

À l'aide de l'algorithme de construction (suggéré figure 14), serait-il possible d'inscrire un carré dans les triangles suivants (figures 13a et 13b) ?



Figure 13

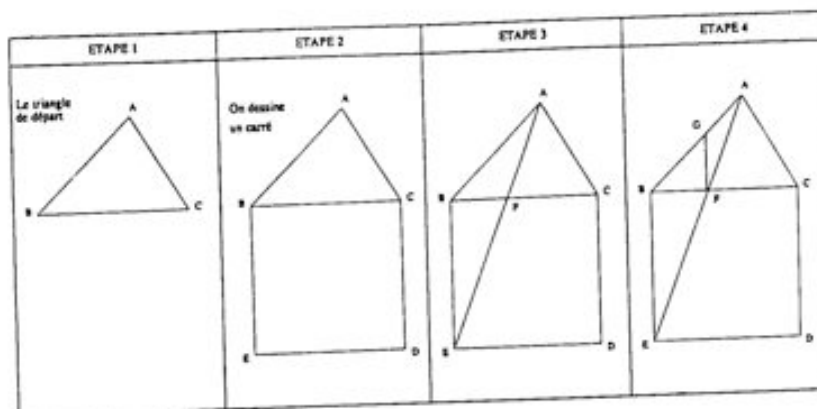


Figure 14

Plusieurs tâches peuvent être associées à cette situation. Pour notre analyse, nous en considérerons ici trois : une tâche que nous appellerons de *construction*, où l'inscription d'un carré dans un triangle, dans une configuration proche de celle donnée par le film, est demandée (figure 14a), une tâche d'*adaptation*, où l'inscription d'un carré dans un triangle obtus est demandée (figure 14b) et une tâche de *description*, où l'objectif est la description de la procédure utilisée.

Analyse de la tâche

La résolution de ce problème se base sur la mise en œuvre de l'homothétie. L'homothétie est un concept important en mathématiques, qui fait partie du programme de seconde. Ce concept généralise le résultat connu par le théorème de Thalès, et a une énorme incidence, bien qu'indirecte, sur les programmes de l'école, puisqu'il permet de justifier beaucoup de démarches utilisées par les élèves, comme nous le verrons par la suite.

En utilisant cet algorithme avec des futurs PE, nous sommes loin de prétendre faire un travail systématique sur l'homothétie ; nous nous intéressons à l'homothétie parce qu'elle nous permet d'amener les futurs PE à avoir une opportunité de développer une activité mathématique d'une certaine complexité, qui est le fondement mathématique d'une pratique courante pour les PE, celle de l'agrandissement et la réduction de figures, partie importante des programmes de mathématique en cycle 3 (CE2-CM1-CM2).

Tâche d'inscription

Dans ce problème, l'homothétie apparaît comme un outil mathématique qui permet de résoudre la tâche, celle d'inscrire un carré dans un triangle. L'algorithme proposé (étapes 2 à 4, figure 13) permet d'obtenir *un côté* du carré inscrit (ici désigné par côté FG). Mais le but de cette tâche est celui de l'inscription d'un carré dans un triangle. Entre l'étape 4 et l'inscription du carré dans le triangle, il y a un saut qui doit être franchi par les étudiants. Deux possibilités, également correctes, sont à envisager : soit la répétition des étapes 3 et 4, ce qui permet l'obtention directe de trois côtés du carré inscrit, désignés par FG, FI et IH (étape 5a, figure 15), soit l'obtention du carré inscrit, par une rotation appropriée du côté FG initialement obtenu, ou par le tracé de parallèles ou perpendiculaires adéquates (étape 5b, figure 15).

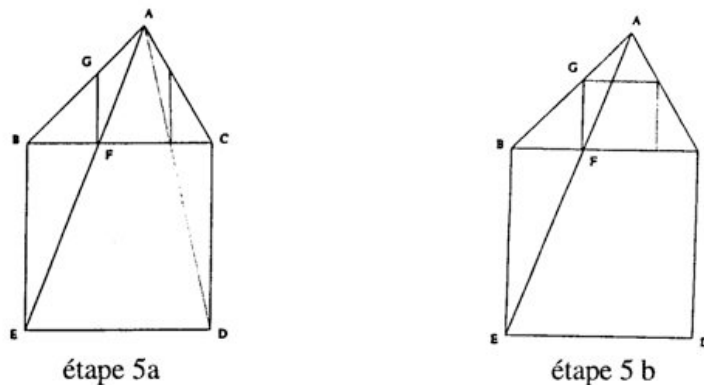


Figure 15

Dans la première alternative, un des côtés du carré inscrit obtenu est en superposition partielle avec deux segments coïncidants, le côté du triangle, et le côté du carré auxiliaire. Cette superposition rend ce côté moins visible que celui obtenu dans le deuxième cas (étape 5b, figure 15). Dans ce dernier cas, un seul côté du carré inscrit est obtenu à partir de l'algorithme donné, et ce côté n'est pas en superposition avec un élément déjà tracé.

Notons que dans les deux cas, il y a une superposition entre les figures — le carré auxiliaire et le carré inscrit — ou par d'autres mots, entre l'objet et son image par homothétie. Cette superposition est un facteur de difficulté considérable dans l'application de l'homothétie à la résolution de problèmes (L. CHARALAMBOS, 1990, 1991). Ces considérations nous amènent à croire que l'étape 5b est plus claire pour les étudiants que l'étape 5a.

Dans les deux cas, le questionnement suivant pourrait être une partie importante d'une démarche à suivre avec des PE : pourquoi obtient-on effectivement un carré, ou, par d'autres mots, pourquoi les côtés GF, FI, IH, GH ont-ils les mêmes longueurs ? Pourquoi est-ce que le segment GH, construit à partir des points G et H (étape 5a) est-il parallèle à FI et égal à FG (et à FI) ? Seule l'utilisation du théorème de Thalès ou un travail sur l'homothétie permet de justifier ces propriétés⁷.

⁷- Notons que la justification mathématique de cette tâche peut être fondée sur le théorème de Thalès, sans recours au concept plus puissant d'homothétie ; ce théorème apparaît dans la plupart des programmes de formation des PE 1ère année.

Tâche d'adaptation

En ce qui concerne ce que nous avons appelé tâche d'adaptation, nous nous centrerons ici sur l'inscription d'un carré dans un triangle avec un angle obtus (figure 13b).

La configuration proposée ici est différente de celle proposée dans le modèle utilisé. Ceci exige, en effet, une *adaptation* de l'algorithme proposé, en obligeant à un choix du côté à partir duquel on applique l'algorithme.

Dans ce cas, seule la construction à partir du côté opposé à l'angle obtus permet l'inscription d'un carré dans le triangle. En fait, l'application de l'algorithme exige la convexité de la région formée par le triangle et par le carré auxiliaire⁸. Sous cette condition, le carré auxiliaire a pour homothétique un carré inscrit dans le triangle.

La construction à partir du côté opposé à l'angle obtus se heurte aux deux obstacles suivants :

- un obstacle d'ordre *perceptif*, lié au fait que la configuration perceptive est dans ce cas assez différente de la configuration suggérée par le film (figure 14) ;
- un obstacle d'ordre *heuristique*, qui peut-être décrit comme l'idée d'utiliser d'autres côtés.

Ces obstacles peuvent faire surgir un problème, celui de la légitimité du changement de base. En changeant de base, applique-t-on encore le même algorithme ? Telle est la question que certains étudiants peuvent se poser. Si d'un point de vue mathématique la réponse est nécessairement affirmative, d'un point de vue didactique plusieurs réponses sont possibles, dépendant de l'appréhension que l'on a de l'algorithme, comme le suggère l'étude que nous avons réalisée avec des élèves de collège (MESQUITA, 1989, 1991).

Tâche de description

Cette tâche peut avoir l'intérêt suivant : est-ce que les étudiants se limitent-ils à proposer une description valide uniquement dans le cas de la configuration proposée, ou visent-ils le cas général ? Notons

⁸ - Dans le cas de la figure 14a, ainsi que dans le cas de la configuration proposée par le film, cette condition de convexité est vérifiée par les trois côtés du triangle.

qu'un examen des contraintes en jeu dans la construction proposée est nécessaire pour pouvoir appliquer l'algorithme à toutes les configurations. En effet, il y a des contraintes (que nous appellerons « figurales » à la suite de R. DUVAL, 1988) qui relèvent d'autres contraintes, dites algorithmiques (par exemple, une construction du type « à partir d'un point, on trace la perpendiculaire à une droite donnée ») sont indépendantes de la configuration. D'un point de vue didactique et cognitif, la distinction entre ces contraintes n'est pas immédiate et exige la compréhension de ce qu'est un algorithme.

Analyse d'erreurs

L'étude que nous avons faite avec des élèves de collège nous fait anticiper certains comportements de futurs maîtres. En ce qui concerne la description de la construction faite par les futurs maîtres, on peut s'attendre à plusieurs situations. Par exemple, les futurs maîtres pourraient utiliser des différents types de *terminologie*. Certaines descriptions peuvent utiliser une terminologie plutôt géométrique (segment, droite,...), tandis que d'autres, plus proches d'une terminologie enfantine, peuvent utiliser un langage moins formalisé (trait, coin,...). On peut anticiper également que le type de *repérage* utilisé peut varier : pour certains, il peut être plus proche d'un repérage *géographique*, lié à un emplacement absolu, pour d'autres, il peut au contraire être *fonctionnel*, plus abstrait et relatif.

On peut anticiper dans les descriptions certains éléments, pas nécessairement corrects d'un point de vue mathématique, mais qui sont importants parce qu'ils sont des révélateurs d'une certaine manière personnelle de considérer l'algorithme. Notre étude antérieure nous fait penser par exemple aux éléments suivants :

- à la présence de non-congruences séquentielles, c'est-à-dire, d'anticipations dans le texte de pas de constructions impossibles d'effectuer dans l'état de la description (par exemple, mentionner un deuxième côté du carré sans avoir mentionné le côté premièrement obtenu) ;
- au refus d'une superposition spatiale, c'est-à-dire, au refus d'utiliser un emplacement du plan de la feuille, « parce qu'il avait déjà été utilisé » ;

- au refus d'utilisation d'une base dans une position différente de celle utilisée dans l'exemple ;
- à la prise en compte de contraintes figurales correspondantes à des positions proches des suggérées par la figure donnée, comme par exemple, construire un rectangle auxiliaire (à la place d'un carré), par le report de mesures prises sur la figure donnée initialement ;
- au non respect de la consigne, comme par exemple, à une inscription « approximative », sans utilisation d'aucun algorithme.

Les trois types d'appréhension d'un algorithme

Ces éléments apparaissent en fait comme des indices de différents types d'appréhension d'un algorithme. Nos recherches antérieures (MESQUITA, 1989, 1991, 1992a, 1992b) suggèrent l'existence de trois types ou niveaux d'appréhension d'un algorithme, que nous passons à décrire :

1. Appréhension figurale

Dans cette forme d'appréhension, les contraintes figurales considérées comme des contraintes inhérentes à l'algorithme, appréhendées d'une façon rigide et exclusive de toute variation figurale (« je trace mon carré sous le triangle ») ; à ce type d'appréhension correspond une *vision physique de l'espace*, un espace qui est perçu comme *matériel et immobile* ; la désignation associée est une *désignation spatiale nominale* (nom propre), permettant un repérage du type *géographique*, en utilisant les termes mentionnés par C. LABORDE (1988) ; l'*espace de travail* est perçu comme un plan de dessin avec une *existence matérielle et fixe, immobile*. L'algorithme est dans ce cas considéré comme une séquence de pas liés à la configuration particulière qui a servi à l'illustrer.

2. Appréhension fonctionnelle

Les contraintes, figurales ou algorithmiques, sont appréhendées différemment, mais des confusions peuvent subsister : par exemple, une position relative (liée à une configuration perceptive) peut être perçue comme contrainte algorithmique (c'est le cas par exemple de l'élève qui réalise la construction en annonçant qu'il « fallait tourner la feuille ») ; l'*espace de travail* est aussi en transition : *espace physique*, mais *mobile* ; type de désignation : permet un repérage relatif, lié à un emplacement relatif (et non plus absolu) ; les transformations

(par exemple, la rotation) ; la désignation n'est plus lié à un emplacement géographique, comme dans le cas précédent, mais elle n'a pas encore le statut de variable. Cette forme d'appréhension est une forme de transition entre l'appréhension figurale et l'appréhension structurale, décrite ci-dessous.

3. Appréhension structurale

Cette forme d'appréhension, qui correspond en effet à celle des mathématiciens, est clairement caractérisée. La distinction entre contraintes figurales et algorithmiques est bien saisie et peut être traduite par la réalisation de l'inscription d'un carré dans un triangle indépendamment de la configuration perceptive ; l'*espace de travail* est ici perçu comme un espace *mathématique, mobile, sans existence matérielle* (la superposition de formes est admise, par exemple) ; les *désignations* sont dans ce cas de type *relationnel*, non liées à un emplacement absolu, mais relatif ; les lettres apparaissent ici avec un statut de variables.

Notons que toute tâche algorithmique présente, par sa nature, une ambiguïté fondamentale : elle apparaît à la fois comme la *conceptualisation d'une construction*, s'appuyant sur des objets géométriques généraux et abstraits et comme la *concrétisation de cette même construction*, utilisant dans ce cas des objets géométriques particuliers et bien identifiés. Cette ambiguïté est une source de difficultés pour les élèves et on peut anticiper que pour certains maîtres en formation elle continue à l'être.

L'utilisation de cette tâche avec les PE

Une utilisation possible de cet algorithme avec les PE, de type diagnostic, concerne l'identification du type d'appréhension de l'algorithme. L'utilisation de cet algorithme peut permettre d'identifier le type d'appréhension de l'algorithme. En effet, il est important que le PE puisse avoir une appréhension structurale d'un algorithme ; au même temps, il est important qu'il puisse être conscient que certaines difficultés des élèves puissent avoir comme origine une autre appréhension de l'algorithme. Un travail autour de l'analyse d'erreurs permet d'identifier les causes de certaines difficultés des élèves et

d'identifier leurs causes. Par ailleurs, cet algorithme donne le fondement mathématique à des pratiques utilisées en CM2 par des maîtres⁹.

Bien entendu, il est important que les PE aient bien saisi la nature d'un algorithme. Il est aussi important que le futur maître puisse s'apercevoir des difficultés de ses élèves, et que, par une médiation appropriée, étalée dans le temps, puisse contribuer à les faire progresser.

Ces résultats montrent qu'il y a un long chemin vers l'abstraction et que les concepts géométriques se forment lentement, en passant par des phases d'abstraction successives, que les enfants doivent nécessairement subir, en quelque sorte. Un rectangle n'est pas la même chose pour un enfant de CP ou de CM. Ces gradations dans les appréhensions qui nous apparaissent plutôt comme des niveaux peuvent encore montrer au futur maître qu'il a besoin de préparer cette abstraction des objets géométriques à partir des objets physiques et que dans ce sens, il doit proposer à ses élèves des situations géométriques diversifiées. Par exemple, il est important que les figures géométriques ne soient pas toujours dans les mêmes positions (un triangle a trois côtés de même importance, et pas une base, horizontale d'ailleurs, et deux côtés, comme les représentations des élèves et des adultes peuvent faire croire) ; que dans certains problèmes, les signes géométriques puissent apparaître pour résoudre certains problèmes pratiques, mais que l'on puisse aussi les considérer comme des objets mathématiques. Une progression appropriée peut permettre aux élèves d'accéder, d'une façon presque naturelle, à cette abstraction, indispensable à l'étude de la géométrie et de tous les domaines mathématiques.

III. UN APPORT DE L'ÉPISTÉMOLOGIE À LA MESURE DES GRANDEURS

Tout individu a des représentations sur ce que sont les mathématiques. Ces représentations ne sont pas neutres et vont influencer sur l'enseignement des mathématiques qu'il va produire.

⁹ - Nous pensons, par exemple, à l'agrandissement de figures en utilisant un quadrillage.

L'analyse épistémologique peut permettre à l'individu de mettre à distance et sous contrôle ses représentations épistémologiques des mathématiques (les conceptions qu'a un individu à travers son vécu mathématique) souvent erronées, induites par la pratique d'enseignement. Ceci en re-situant dans le temps et l'espace les concepts mathématiques et en redonnant une historicité à des notions métamathématiques.

L'analyse épistémologique met en évidence l'évolution au cours du temps du concept étudié, en le mettant en relation avec les problématiques qui ont été à la base de son évaluation, sa dépendance des domaines mathématiques concernés et du niveau d'élaboration des objets qu'il manipule. Elle permet également, en nous aidant à comprendre l'évolution de la connaissance scientifique, d'évaluer les distances entre savoir savant et savoir enseigné à un moment donné.

Pour illustrer notre troisième principe, nous centrons notre réflexion sur l'épistémologie des grandeurs et leurs rapports avec les nombres. Ces notions centrales à l'école élémentaire sont sujettes à plusieurs confusions.

Chez les Grecs, les nombres¹⁰ en géométrie représentaient tout naturellement les longueurs de segments de droite. Ils savaient par ailleurs qu'on pouvait remplacer des opérations arithmétiques par des constructions géométriques. Par exemple, additionner deux nombres en mettant deux segments de droite bout à bout.

Pendant longtemps, le stock des nombres s'arrêtait aux nombres *rationnels* (les entiers et les fractions). Les entiers se visualisaient et se manipulaient aisément : pour calculer il suffisait de disposer de cailloux (appelés « calculi », le mot « calcul » vient de là). Les fractions qui n'avaient pas de statut de nombre étaient facilement accessibles : pour prendre les $\frac{2}{3}$ d'une grandeur, il suffisait de la diviser par trois et d'en prendre deux.

Cette correspondance biunivoque entre nombres et longueurs (à toute longueur devait correspondre un nombre et à tout nombre une longueur) fut mise en question lorsque des disciples de Pythagore prouvèrent que certains segments faciles à construire géométrique-

¹⁰ - Entiers bien évidemment et les fractions qui n'avaient pas le statut de nombre. Mais on savait qu'elles existaient en nombre infini et qu'elles permettaient de subdiviser aussi finement qu'on veut l'échelle des nombres (entiers).

ment avaient une longueur qui ne correspondaient à aucun nombre *rationnel*. Ils les appelèrent *irrationnels*. Le cas de la diagonale d'un carré ou le nombre d'or¹¹ qui intervient dans la géométrie du pentagone sont des cas typiques des ces longueurs. Cette mystique pythagoricienne des nombres jouait un obstacle épistémologique à la conception des *incommensurables*.

Les Grecs englobaient longueurs, aires et volumes dans le concept général de grandeur. Euclide ne définissait pas la notion de grandeur, ni les deux relations premières entre grandeurs (la comparaison et la somme) mais il énumère quelques propriétés reliant ces notions :

Si $A > B$ alors $A + C > B + C$.

Un multiple pA d'une grandeur s'obtient en ajoutant p fois la grandeur A .

Euclide dit alors que deux grandeurs de même espèce A et B sont *commensurables* s'il existe une troisième grandeur de cette espèce, C , telle que $A = pC$ et $B = qC$ pour deux entiers p et q , ce qu'on écrit $\frac{A}{B} = \frac{p}{q}$.

Dans la suite nous définirons les notions de grandeur que nous empruntons à N. ROUCHE (1992, p 37), celle de la commune mesure de deux grandeurs et aussi la mesure de grandeurs. Nous montrerons la place centrale qu'occupe l'Algorithme¹² d'Euclide (vers 300 avant JC) dans la construction des savoirs mathématiques. Cette notion ouvre les horizons sur plusieurs champs fertiles de connaissances mathématiques que les futurs maîtres d'écoles doivent acquérir, mais aussi qui sont en étroite corrélation avec des notions mathématiques qu'ils ont à construire à l'école.

¹¹- Nombre par ailleurs utilisé dans l'architecture grecque pour maintenir des bonnes proportions ou des proportions d'or.

¹²- Le mot « algorithme » vient du nom du mathématicien arabo-persan AL Khawarizmi (IXe siècle) de la maison de la sagesse à Bagdad qui travailla à la vulgarisation de l'arithmétique indienne. Ce mot sert à désigner toute méthode de calcul permettant de résoudre un problème. Un algorithme se présente sous forme d'une suite d'opérations élémentaires obéissant à un enchaînement déterminé

Notion de grandeur

Dans l'ensemble d'objets de même nature (par exemple objets longs, objets lourds...) on considère les sous-ensembles dont chacun est formé de tous les objets équivalents, selon un point de vue, à l'un d'eux. On dira alors que chacun de ses sous-ensembles, est une grandeur.

On se trouve ici devant une notion assez intuitive pour la pensée commune, mais qui est assez difficile à définir et à formaliser. En effet, il y a d'abord des objets, et la grandeur est considérée comme une propriété de ceux-ci. On identifie la grandeur non pas à un objet, mais à un ensemble.

Il s'agit de donner à la grandeur un caractère non absolu, indépendant de l'objet. Peut-on dire qu'un objet allongé possède une longueur ? Il est clair que non, car les seules possibilités que nous avons dans la pratique sont les comparaisons.

Pour illustrer ces propos, voici deux exemples :

Exemple 1 :

Dans cet exemple, le parallélogramme allongé paraît plus grand que le rectangle alors qu'ils ont la même aire.

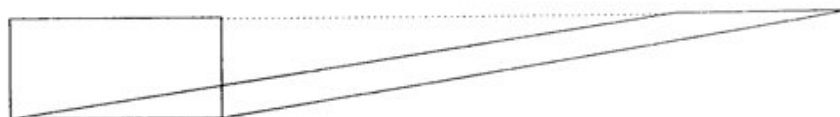


Figure 16

Exemple 2 :

Prenons un rectangle articulé en ses quatre sommets. Transformons-le en un parallélogramme. Une conception erronée veut que ces deux quadrilatères aient la même aire.

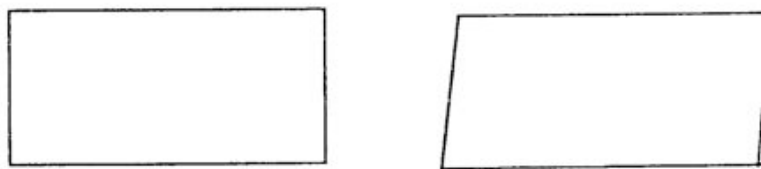


Figure 17

Notion de commune mesure de deux grandeurs

Considérons deux grandeurs inégales correspondant à des objets longs, par exemple. Pour les comparer, l'idée naturelle qui vient à l'esprit est de comparer la plus petite multipliée par un nombre naturel, et la plus grande.

« Si la plus petite va n fois dans la grande », on dit que les deux grandeurs sont entre elles dans la proportion de 1 à n .

Sinon l'idée est de chercher, *si cela est possible*, une troisième grandeur qui irait un nombre entier m de fois dans la petite et un nombre entier n de fois dans la grande.

Si on trouve une telle troisième grandeur, on dira que la petite grandeur de départ est à la grande comme m est à n . La troisième grandeur est appelée *commune mesure* des deux autres.

Si cette troisième grandeur n'existe pas, on dira qu'il n'y a pas de commune mesure entre les deux grandeurs. Les deux grandeurs sont dites *incommensurables*.

Algorithme d'Euclide et commune mesure

Soit deux objets A et B (longs pour fixer les idées). On porte le petit dans le grand autant de fois que l'on peut, ce qui donne un reste r_1 .

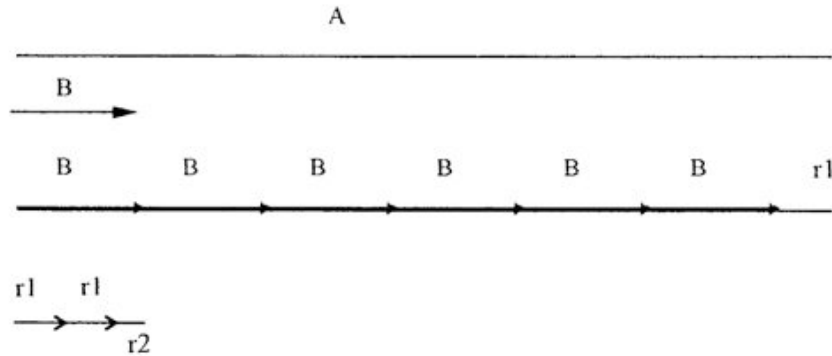


Figure 18

Si ce reste va un nombre de fois dans le petit, il irait un nombre de fois dans le grand : la *commune mesure* est r_1 . Sinon, il y a un autre reste r_2 .

Si r_2 va un nombre de fois dans r_1 , alors il va un nombre entier de fois dans B et dans A : r_2 est la *commune mesure* de A et B. Sinon on recommence, en essayant chaque reste dans le précédent, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de reste. Si le processus s'arrête, le dernier reste non nul est la *commune mesure*. Sinon, les deux grandeurs sont incommensurables.

La méthode de coïncidence pour la commune mesure

Soit à comparer deux objets A et B.

Cette méthode de coïncidence consiste à juxtaposer un nombre de copies de A et un nombre de copies de B, jusqu'à ce qu'on arrive à coïncidence lorsque cela est possible. On a donc $7A = 4B$ et par conséquent $B = 7\frac{A}{4}$. Il faudrait donc partager A en 4 parties égales : la

commune mesure est alors $\frac{A}{4}^{13}$. On dit dans ce cas que A est à B comme 4 est à 7.

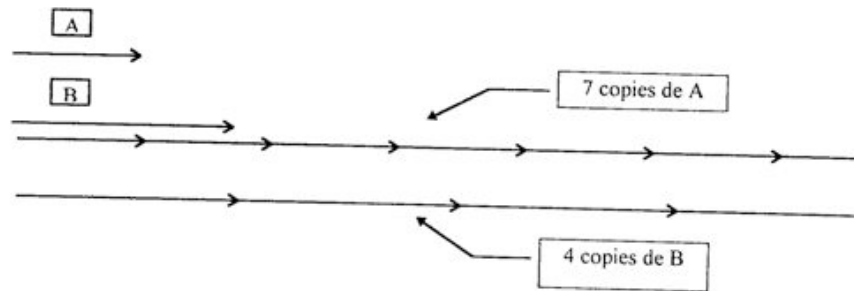
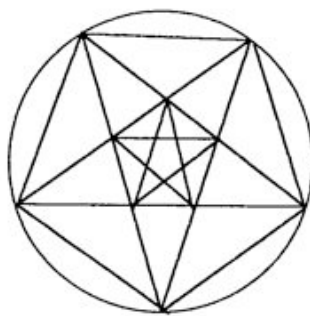


Figure 19

Un exemple où il n'existe pas de commune mesure



Il s'agit de comparer les longueurs ab et dc .

1^{ère} étape:

$$ab - fc = dc - fd,$$

d'où $dc = ab + fd$ (1^{er} reste)

2^{ème} étape:

$$ab = fd + fe$$

or $fd = ig$.

3^{ème} étape:

Il s'agit de comparer ig et fe ; or ces deux longueurs sont respectivement la diagonale et le côté du pentagone $efihg$. l'algorithme d'Euclide nous renvoie à la première étape, il est donc cyclique et ne s'arrêtera jamais.

Figure 20

Conclusion : il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté d'un pentagone, car s'il y en avait une le processus s'arrêterait.

¹³- Notons qu'on aurait pu prendre comme commune mesure $\frac{B}{7}$. En effet comme $7A = 4B$, on a $A = 4\frac{B}{7} \dots$

L'avantage de la commune mesure, c'est qu'elle ramène la comparaison de 2 grandeurs à celle de 2 *nombres naturels*. Mais elle a l'inconvénient, outre qu'elle n'existe pas toujours, de ne s'appliquer commodément qu'à deux grandeurs bien isolées. Le problème devient assez difficile lorsqu'il s'agit de trouver la commune mesure de plusieurs grandeurs. D'où l'idée de mesure de grandeur que nous allons développer ci-après.

Mesure d'une grandeur

« Pour mesurer une longueur quelconque, l'expédient que fournit une sorte de géométrie naturelle, c'est de comparer la longueur d'une mesure à celle de la longueur que l'on veut connaître. » (CLAIRAUT, 1743, 1922).

L'idée de mesure consiste à comparer toutes les grandeurs d'un domaine à une grandeur particulière de ce domaine, choisie comme unité de mesure¹⁴.

Soit A une grandeur prise dans un domaine donné. Choisissons également dans ce domaine, une grandeur particulière U que nous appelons unité de mesure. Si l'unité U « va » un nombre entier de fois dans A, ce nombre est appelé la *mesure* de A, relative à l'unité U. Sinon, on compare le reste à des sous-multiples de l'unité. Et ainsi de suite...

Exemple :

¹⁴ Dans toute activité de mesure, le choix d'une unité de mesure est une étape importante.

Exemple :

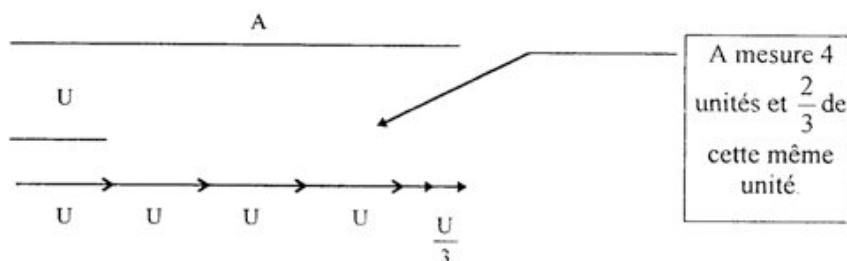


Figure 21

Algorithme d'Euclide et nombres

En utilisant les « *nombres* » nous pouvons représenter d'une autre façon l'algorithme d'Euclide, celui-ci prend la forme moderne suivante :

Si $a_2 < a_1$ où a_1 et a_2 sont des nombres entiers, on écrit

$$a_1 = n_1 a_2 + a_3 \quad 0 < a_3 < a_2$$

puis si $a_3 \neq 0$

$$a_2 = n_2 a_3 + a_4 \quad 0 < a_4 < a_3$$

Les nombres qui interviennent ici sont tous des entiers.

Comme $a_1 > a_2 > a_3 \dots$ et comme nous avons des entiers, le procédé doit se terminer à 0 au bout d'un nombre fini d'étapes.

Grâce à Aryabhata (476-550 après J. C) (cité par DHOMBRES 1978) on peut écrire :

$$\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}$$

puis

$$\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{a_3}{a_4}} \quad \text{etc...}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \frac{1}{n_3 + \frac{1}{n_4 + \frac{1}{n_5 + \dots}}}}$$

que l'on note aujourd'hui $\frac{a_1}{a_2} = n_1 + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \dots$

Le procédé s'arrête lorsque a_1 et a_2 sont entiers. Cependant, si a_1 et a_2 ne le sont pas, le procédé peut ne pas avoir de fin. Ainsi comme le montre Bombelli en 1572 dans son *Algèbre* avec :

$$a_1 = \sqrt{2} \text{ et } a_2 = 1 \text{ et sachant que } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2} + 1} < 1,$$

on peut réitérer le processus indéfiniment et on a :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Exemple de commune mesure et algorithme d'Euclide

Le problème du pavage d'un rectangle par des carrés a une pérennité dans les manuels scolaires qui remonte à au moins 1920, comme le montre l'étude faite par D. LAHANIER (1993). En plus des notions mises en évidence dans cet article, nous montrerons ici que celles de commune mesure et de nombre rationnel y ont leur place :

Problème : pour un rectangle donné de dimensions l et L , on se pose la question de savoir quel est le grand carré avec lequel on peut paver le rectangle sans lacunes ni chevauchements.

Il s'agit de trouver la mesure c du côté d'un carré tel que $L = nc$ et $l = mc$, n et m sont des entiers. Ce nombre c doit alors diviser L et l , et être le plus grand. C'est donc le PGCD¹⁵ de L et de l . La commune mesure pour L et l est c .

$\frac{L}{l} = \frac{nc}{mc} = \frac{n}{m}$. On a donc $\frac{L}{l}$ est un nombre *rationnel*.

Réciproquement, supposons que le rapport $\frac{L}{l}$ soit un nombre *rationnel*, c'est à dire le quotient de deux entiers. Il existe donc deux entiers p et q supérieurs à 1 tels que : $\frac{L}{l} = \frac{p}{q}$ et donc $\frac{L}{p} = \frac{l}{q}$. Soit c la valeur commune de ce rapport $\frac{L}{p} = \frac{l}{q}$. On obtient : $L = p \times c$ et $l = q \times c$. Il est donc possible de paver le rectangle au moyen de carrés de côté c .

Nous dirons pour conclure cette partie, qu'il existe un long chemin qui sépare le concept de mesure et celui de nombre. Avant les nombres il y a des objets que l'on compare entre eux d'une part, et par rapport à un objet particulier parmi eux d'autre part. En outre la notion de mesure est et doit être construite indépendamment des nombres.

CONCLUSION

L'approche que nous avons esquissée ici se base sur des exemples particuliers issus de la géométrie et de la mesure des grandeurs. Cependant, il nous semble que ces démarches peuvent être utilisées dans d'autres champs des mathématiques comme par exemple l'ensemble des nombres.

Ainsi l'effort de problématisation, souvent occulté dans les écrits mathématiques existants, devrait amener les étudiants à acquérir des méthodes d'investigation, non seulement basées sur une organisation nouvelle de leurs connaissances, mais aussi ouverte sur la recherche d'informations nouvelles dans la théorie mathématique constituée.

¹⁵ - Plus grand commun diviseur.

De la même façon, l'analyse de la tâche d'un point de vue mathématique et cognitif, illustrée dans cet article à partir d'une situation géométrique, peut être aussi être fait en n'importe quelle situation mathématique. L'analyse de la tâche — un des acquis de la recherche en didactique des mathématiques en France — doit être un support essentiel dans la formation des futurs maîtres.

L'apport épistémologique montré ici sur la problématique de la mesure des grandeurs, peut être étendu à d'autres domaines mathématiques. L'analyse épistémologique des concepts enseignés à l'école permet au futur maître de prévoir, en partie, et comprendre certaines de ces difficultés pouvant être rencontrées par les élèves, dans l'appropriation de certaines notions et réagir en conséquence.

Notons que la position que nous défendons ici concerne les mathématiques, mais les principes sur lesquels nous nous basons ne nous semblent pas caractéristiques des mathématiques ; ils pourraient être également des principes unificateurs d'un enseignement d'autres matières scientifiques, comme la physique, la chimie ou la biologie, par exemple. En résumé, nous avons décrit ici certains principes qui ne sont pas originaux, dans le sens qu'ils sont des fois mentionnés dans les programmes de formation. Ce qui pourrait être caractéristique de cette approche et ce qui peut constituer son originalité est que nous essayons de tenir compte de l'ensemble de ces principes, en les mettant à l'œuvre dans un programme de formation¹⁶.

A. DE MESQUITA

M. ENNASSEF

L. ROYE

IUFM Nord-Pas de Calais

Abstract : Future school teachers come, when they start training, from diversified universitarian backgrounds that have a distant relationship to mathematics. This fact is the starting point of our reflection upon a mathematical training that ta-

¹⁶ - Une application pratique de ces principes est étudiée et mise à l'œuvre dans la formation des futurs professeurs des écoles, dans le cadre d'un projet subventionné par l'IUFM Nord-Pas de Calais.

kes these specificities into consideration. This article presents three basic principles in that perspective : the problematisation, the analysis of the task and of the students' errors, the epistemological analysis. We illustrate such principles having recourse to two mathematical fields : geometrical constructions and measure of sizes.

Keys-words : Teacher's training - problematisation - task analysis - errors analysis - epistemology - measure of sizes - geometrical construction.

BIBLIOGRAPHIE

- Actes du Colloque de l'INRP* (1992) Recherche en Didactique des Disciplines - contribution à la formation des maîtres, Paris, 13 février.
- ARTIGUE M. (1990) Épistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10. 2/3, 241-286.
- BARBIN E. (1991) « Les éléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée », *Repères-IREM*, 4, p. 119-133.
- CHARALAMBOS L. (1990), *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- CHARALAMBOS L. (1991), « Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de l'homothétie », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11. 2/3, 295-324
- CLAIRAUT (1743) *Éléments de géométrie*. Gauthier-Villars, Paris, 1922.
- DHOMBRES (1978) *Nombre, mesure et continue. Épistémologie et histoire*. Publication IREM de Nantes. CEDIC-Nathan.
- DIEUDONNE J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain. Histoire et philosophie des Sciences*. Hachette. 1987.
- DUVAL R. (1988) « Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 57-74.
- GLAESER G. (1980) *Épistémologie et didactique. Cours de 3ème Cycle*. IREM de Strasbourg.
- HUSSERL E. (1962) *L'origine de la géométrie*. Paris, PUF (3e éd. 1990).

- LABORDE C. (1988) « Problèmes d'enseignement de la géométrie au collège », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 75-93.
- LAHANIER D. (1993) « De l'exercice d'application à la situation problème : comment rendre compte de différentes pratiques lorsqu'elles s'appuient sur un même énoncé », *Spirale*, 10/11, p. 82-107.
- LEBESGUE H. « Leçons de géométrie au Collège de France » (1940)
- MESQUITA A.L. (1989) *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie : Éléments pour une typologie*, Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.
- MESQUITA A.L. (1991) « La construction algorithmique : niveaux ou phases ? » *Proceedings of the Fifteenth PME Conference*, vol III, pp. 1-8, Assisi (Italy), June 29-July 4.
- MESQUITA A.L. (1992a) « Les types d'appréhension en géométrie spatiale : esquisse d'une recherche », *Actes du Colloque International sur la Représentation Spatiale :: Représentation de l'espace et habiletés spatiales*, CIRADE/Université du Québec à Montréal, Canada 28 au 28 août 1991, *Topologie Structurale/Structural Topology*, 18, p. 19-30.
- MESQUITA A.L. (1992b) « Les types d'appréhension en géométrie spatiale : une étude clinique sur le développement-plan du cube », *Proceedings of the 16th PME Conference (International Group for the Psychology of Mathematics Education)*, New Hampshire, August 7-11.
- MESQUITA A.L. (à paraître) « Les directions de la recherche en Europe sur la formation des maîtres : perspectives et méthodes », présentation au colloque de l'ACFAS, Université du Québec à Montréal,
- PETERSEN J. (1880) *Problèmes de constructions géométriques*. Ed. Gabay, Paris (réed. 1990).
- PIAGET J., INHELDER B., SZEMINSKA A. (1973) *La géométrie spontanée de l'enfant*. (2e. éd.), PUF, Paris.
- PIAGET J., INHELDER B. (1981) *La représentation de l'espace*. (4e. éd.), PUF, Paris.
- POLYA G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème*. Dunod, Paris.

- ROUCHE N. (1992) *Le sens de la mesure*. Bruxelles, Didier Hachette.
- ROYE L. (1993) « Analyse et critères de choix de situations visant l'acquisition de compétences à l'école par la résolution de problèmes mathématiques », *Spirale*, 10/11, 123-164.
- VERGNAUD G. (1981) « Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2.2, 215-232.
- VERGNAUD G. (1991) « La théorie des champs conceptuels », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10. 2/3, 133-170.
- VYGOTSKY L.S. (1934-1985) *Pensée et langage*. Messidor/Éditions Sociales, Paris.