

Louis ROYE

ACQUISITION DE COMPÉTENCES À L'ÉCOLE PAR LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES AU QUOTIDIEN

ANALYSE ET CRITÈRES DE CHOIX DE SITUATIONS

Nous considérerons une situation d'apprentissage comme l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'enfant, en particulier les relations qu'il entretient avec son environnement, et l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution dirigée vers un but. Une situation est une situation-problème pour l'enfant si elle nécessite de sa part une réponse adaptée non disponible d'emblée pour lui.

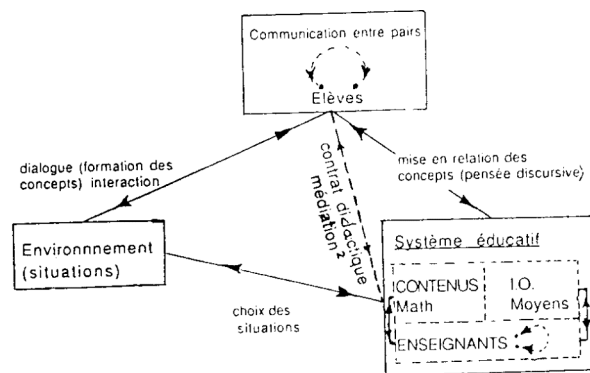
I. POSITION DU PROBLÈME OU "QUE FAUT-IL ENSEIGNER ? COMMENT FAIRE ?"

Quelle que soit la liberté laissée aux enseignants pour organiser leur enseignement au quotidien, il est clair que la base de celui-ci est constituée par les textes officiels "Les cycles à l'école" (1991) qui intègrent les I.O. de 1985. Les orientations générales, les compétences transversales et les compétences dans le domaine de la langue nous apparaissent comme la réalisation d'objectifs généraux à qui les compétences disciplinaires ouvrent la voie. Celles-ci indiquent ce qu'il y a lieu de réaliser prioritairement par cycles. Il reste alors aux enseignants à répartir les contenus par périodes puis par séquences de manière progressive en tenant compte de la variabilité du degré de maîtrise. Cette opérationnalisation en marche doit aboutir à la formulation

L. ROYE

explicite de tâches que les élèves devront accomplir. Son but est d'atteindre en situation et par l'option fondamentale des résolutions de problèmes¹, un changement valable, souhaitable, réalisable et durable dans le comportement des élèves. Cette modification due à l'enseignement vise une optimisation progressive des compétences. Elle consiste à faire acquérir des compétences nouvelles dans la réalisation d'un changement allant soit de l'absence d'un comportement jusqu'à sa maîtrise, soit d'un comportement imparfait vers un comportement plus adapté dans les situations.

A notre avis, le schéma² suivant synthétise les remarques précédentes. Les interactions entre les différents éléments y sont représentés par des doubles flèches.



La flèche en pointillé indique le dialogue privilégié que doit être celui des élèves et de l'enseignant dans le *contrat didactique*³ qui fixe les obligations de chacun explicitement ou implicitement.

¹ - Cette option consiste réellement en une série d'hypothèses pour l'apprentissage et le transfert des acquis dans les réalités.

² - « Médiation » (note 2 du schéma) : il s'agit d schéma de Feuerstein
stimuli → médiateur → organisme humain → médiateur → réponse

³ - *Contrat didactique* : G. Brousseau.

C'est l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître et l'ensemble des comportements spécifiques du maître qui sont attendus de l'élève (attitudes et médiation surtout). Le contrat didactique gère les rapports à l'intérieur du groupe social "classe".

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Dans ce cadre, on peut comprendre facilement l'option "Résolutions de problèmes" car elle permet, d'une part, de tenir compte, tout en les intégrant, de trois principes :

- 1°) l'importance relative des compétences,
- 2°) l'accessibilité des objectifs à réaliser,
- 3°) une progression par cycles

en respectant les conceptions actuelles de la personnalité⁴ en relation avec la situation socio-culturelle existante et les possibilités réelles des enfants et de l'Ecole. D'autre part, par sa permanence dans le temps, elle permet aussi d'engager l'avenir face aux exigences et aux attentes d'une société en mutation.

Pratiquement la fin de l'opérationnalisation, c'est-à-dire la définition des objectifs poursuivis de fait dans la réalisation quotidienne des tâches n'est-elle pas en décalage sur les objectifs généraux ? L'écueil de l'opérationnalisation serait de tomber dans une certaine incohérence résultant du morcellement de l'enseignement. Une linéarisation serait plus rassurante mais ne risquerait-elle pas d'être inhibitrice de la liberté et de la créativité par l'abandon de l'inattendu et de l'imprévisible des réactions d'enfants en train de résoudre des problèmes ? Un garde-fou consiste à se référer constamment au cadre des objectifs généraux et d'y emmener les élèves par la médiation, sans confondre ce qui est accessible et ce qui est effectivement atteint.

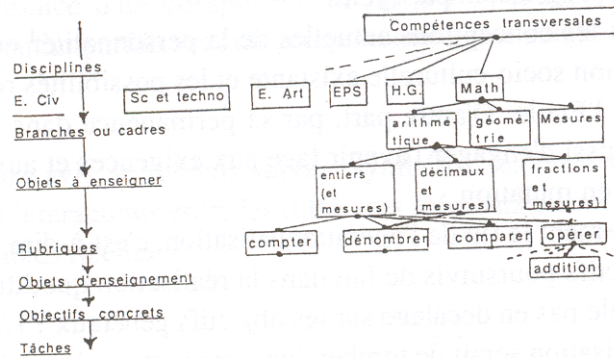
Dans "les cycles à l'École" le contenu est structuré par la division en branches (ce qui remet en question la programmation linéaire de type skinnérien⁵).

La multiplicité des tâches rend impossible une représentation complète de l'arbre. Dans les "Cycles à l'École" on fait donc l'hypothèse que l'ensemble des compétences à acquérir pour réaliser ces tâches peut être réduit à un petit nombre d'éléments. L'expression de ces compétences découle des programmes officiels de 1985.

⁴- Il s'agit ici de l'objectif "Formation de la personnalité" en termes généraux de qualités et de modèles cognitifs qu'un individu doit être à même de posséder pour participer à la vie sociale de façon autonome, critique et constructive.

⁵- P. Gréco, "Enseignement programmé et mathématiques", in numéro spécial du *Courrier de la recherche pédagogique* I.P.N., janvier 1965.

L. ROYE



Il est clair que les activités d'apprentissage en Mathématiques participent aussi à l'acquisition de compétences dans le DOMAINE DE LA MAÎTRISE DE LA LANGUE.

L'une des rubriques est absente de notre "arbre", ceci est voulu. En effet, cette rubrique manquante coiffe toutes les autres et participe aux compétences générales, en particulier au "traitement de l'information". Comme le souligne l'encart de la page 52 des "Cycles" cette option fondamentale de l'apprentissage des mathématiques est celle de la RÉSOLUTION DE PROBLÈMES.

Dans cet article, nous analyserons d'abord des processus de résolution de problèmes à l'aide d'exemples rencontrés à l'école. Nous dégagerons ensuite les facteurs personnels et situationnels qui influent sur eux. Nous nous intéresserons enfin au choix de situations visant l'acquisition de compétences.

2. LA RÉOLUTION DE PROBLÈMES COMME SOURCE ET CRITÈRE DE LA PENSÉE CONCEPTUELLE ET DE LA CONNAISSANCE OPÉRATOIRE

La pensée n'est conceptuelle que si elle obéit à des critères d'ordre théorique et d'ordre pratique à la fois. Un simple comportement, même adapté, n'est pas conceptuel, mais un discours théorique, s'il ne donne pas lieu à une conduite adaptée dans les situations où ce discours s'applique, n'est pas non plus conceptuel. Une pratique obtenue par dressage ou conditionnement n'est pas un concept.

L'activité en situation est, pour une majorité croissante de psychologues, à la fois la source et le critère de la pensée conceptuelle ; le langage joue, bien entendu, un rôle fondamental, puisqu'il permet seul le discours théorique et que, sans ce discours, il n'y a guère de concept, mais il ne constitue pas, aux yeux des psychologues, le critère le plus décisif.

Le critère le plus décisif reste l'action en situation, ou encore ce que les psychologues appellent la solution de problème. La solution de problème a, pour le psychologue, une signification beaucoup plus large que le mathématicien. Est problème tout ce qui, d'une façon ou d'une autre, implique de la part du sujet la *construction d'une réponse ou d'une action qui produise un certain effet* ⁶.

Nous entendons ici "concept comme la possibilité de penser une chose comme équivalent d'un groupe de choses et par conséquent un élément de cette chose comme équivalent de ce groupe". Ainsi en va-t-il en mathématiques du concept de droite ou du concept du nombre.

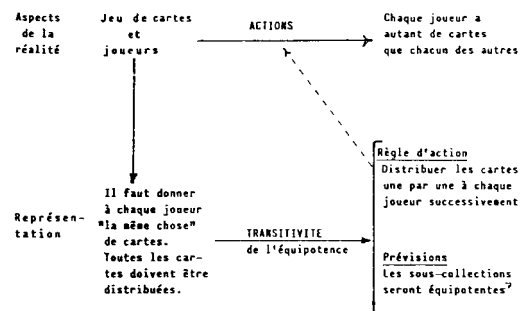
Le concept opératoire est celui qui permet de traiter des situations nouvelles dont la résolution ne peut se faire automatiquement par des mécanismes acquis. Dans la notion de problème il y a, l'idée de nouveau, ce qui ne signifie pas que la procédure avec laquelle l'élève va attaquer le problème nouveau est elle aussi nouvelle, car c'est le plus souvent en utilisant des acquis antérieurs qu'il s'y lancera.

⁶- G. Vergnaud Conférence à l'APMEP, 1977, Colloque de Rennes.

L. ROYE

Prenons un exemple de résolution de problème : “*Distribuer les 32 cartes d’un jeu entre 4 joueurs de façon que chacun en ait autant*”.

Au niveau de l’école maternelle, il s’agit d’une situation de problème où les actions de l’enfant sont aussi matérielles. On peut écrire un mode de résolution suivant le schéma⁷ :



Il existe ici plusieurs types de représentations, c’est ainsi que l’on peut penser à partager les cartes 2 à 2 ou 4 à 4 ou encore 3 à 3 puis encore 3 à 3 puis 2 à 2, etc...

On peut aussi s’aider de représentations imagées comme des dessins de cartes ou de représentations plus conventionnelles.

Une représentation beaucoup plus élaborée utilise des nombres (SIGNIFIÉS) et leurs écritures (SIGNIFIANTS) suivant le schéma :

⁷- On dit que deux ensembles sont équipotents pour exprimer qu’il existe une bijection de l’un vers l’autre, on dit aussi qu’ils ont un même cardinal.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Aspects de la réalité	Joueurs et jeu de cartes	actions	Chacun des quatre joueurs a huit cartes
REPRE- SENTATION	SIGNIFIES Nombre de cartes et nombre de joueurs	Propriétés de la multiplication	Distribuer quatre cartes à chaque joueur deux fois de suite
	SIGNIFIANTS {4, 32}		Prévisions Chaque joueur aura huit cartes
		$32 = 8 \times 4$ $32 = (4 \times 4) \times 2$	

On pourrait encore citer d'autres façons d'opérer dans le système formel des nombres entiers :

$$32 - 4 = 28, 28 - 4 = 24, 24 - 4 = 20, \dots, 4 - 4 = 0$$

ou bien

+4	→	32	28	24	20	16	12	8	4
		28	24	20	16	12	8	4	0

ou encore

+4	→	0	4	8	12	16	20	24	28
		4	8	12	16	20	24	28	32

Dans le premier cas, on retire 4 cartes huit fois de suite, dans le second, on en ajoute 4 huit fois de suite. Les procédures matérielles apparentes semblent être identiques mais leur organisation interne change. Cette organisation interne peut ne consister qu'en l'application d'un algorithme appris, dans ce cas elle est dite non cognitive en ce sens qu'il n'y a pas mobilisation de la pensée. Si au contraire,

L. ROYE

elle consiste à coordonner une nouvelle manière des acquis antérieurs, elle sera dite cognitive⁸.

En définitive dans les formes plus élaborées de résolution, l'enfant travaille à quatre niveaux de pensée distincts :

1. niveau des objets
2. niveau des collections
3. niveau numérique (nombres et relations) (SIGNIFIÉS)
4. niveau du système formel des écritures chiffrées des nombres et de leur syntaxe opératoire (SIGNIFIANTS)

Dans la conférence qu'il a faite au cours des Journées APMEP de Rennes, G. Vergnaud a énoncé trois concepts fondamentaux qui accompagnent sa thèse d'homomorphisme entre la réalité et la représentation⁹ :

"1. Le concept de règle d'action ou, plus complètement, de règle de production des actions du sujet. Ces règles sont celles qui engendrent les actions observables du sujet, notamment ses actions matérielles.

2. Le concept d'invariant opératoire. Ces invariants sont les objets de pensée stables, produits de la fonction symbolique et possédant certaines propriétés qui rendent possible un calcul relationnel et permettent ainsi d'engendrer règles d'action et prévisions.

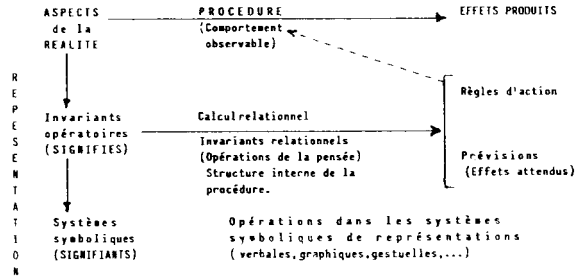
3. Le concept de représentation calculable qui résume le tout et qui intègre les concepts de fonction symbolique, d'invariant et de calcul relationnel".

Les schémas précédents se généralisent donc comme suit :

⁸- Van Parreren (1970) cité dans *Les fondements de l'action didactique* , Ed. De Boeck.

⁹- B. Vergnaud in *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* n° 307, février 77.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES



Précédemment, nous avons distingué le cognitif du non-cognitif au niveau de l'organisation interne d'une procédure, il faut toutefois remarquer que ces deux types d'organisation peuvent intervenir dans un processus de résolution. Les compétences s'acquièrent par l'organisation nouvelle de compétences acquises. Dans notre propos, il s'agit du développement qualitatif de compétences.

Dans le problème de distribution de cartes, on a vu que, même si le recours aux nombres est pratiquement induit par l'énoncé, le calcul relationnel change suivant les possibilités des enfants. Il est clair, par exemple, que la nature des situations et la taille des nombres en jeu sont des facteurs influant sur le développement qualitatif.

A ce propos, il faut signaler que l'aide apportée par les signifiants scripturaux peut ne pas s'exercer si l'enfant ne compose pas les informations qu'ils représentent, même s'il en maîtrise localement l'usage formel. Cela paraît souvent beaucoup plus évident pour les signifiants verbaux. Si l'on vise l'acquisition de compétences par la résolution de problèmes, il y a lieu de bien distinguer les signifiants-outils des concepts-outils¹⁰ qui sont eux d'ordre cognitif. Les premiers sont au service des seconds tant dans la construction que dans

10- R. Douady (Paris VII) distingue concept-outil et concept-objet, le premier étant considéré comme un concept en formation dont l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait dans la résolution de problèmes, le second étant considéré d'un point de vue culturel comme ayant sa place dans l'édifice structuré des connaissances reconnu socialement.

L. ROYE

les articulations de ceux-ci. D'ailleurs, les mêmes signifiés peuvent se manifester à l'aide de différents systèmes de signifiants.

Même si les algorithmes appris jouent un grand rôle dans la résolution de problèmes, leur construction dans l'apprentissage suppose l'acquisition progressive d'autres compétences par la rencontre fréquente de *situations variées*. C'est à ces compétences que l'on va s'intéresser.

Dans les séquences habituelles de classe, on rencontre le plus souvent deux types de situations. Il s'agit, d'une part, du passage d'aspects de la réalité aux représentations mentales où un problème initial sera transformé pour devenir accessible et, d'autre part, de la reconstruction mentale d'une situation décrite par un énoncé, celui-ci étant quelquefois agrémenté de figures, et ceci toujours dans un but d'accessibilité.

A l'école, ces deux types de situations correspondent souvent à ce que Brousseau¹¹ désigne par SITUATIONS-PROBLÈMES car les circonstances dans lesquelles se trouve l'enfant dépendent de contraintes matérielles et de conditions psychologiques et sociales qui peuvent en modifier l'interprétation, comme nous allons le voir dans les exemples qui suivent.

3. ANALYSE DE PROCESSUS DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES DE GÉOMETRIE

Le modèle de résolution précédent est-il adapté aux problèmes de géométrie ?

3.A. La pyramide cachée

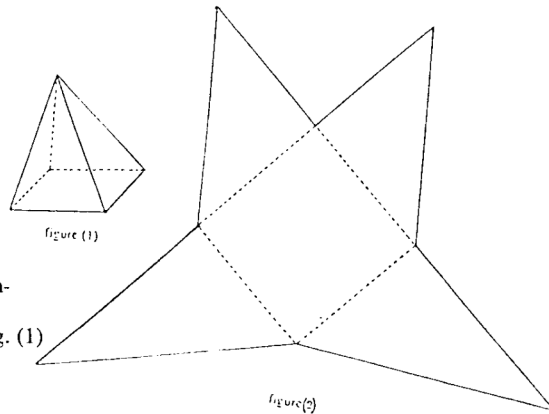
Prenons l'exemple d'une pyramide à construire (figure 1). Il s'agit d'arriver à construire pas à pas un patron de cette pyramide par

¹¹- G. Brousseau (1987) in "Rationnels et décimaux".

le jeu de questions-réponses entre un groupe d'émetteurs et des groupes de récepteurs¹².

Remarque :

La figure 2 n'est pas le seul patron possible de la figure (1). Il en existe plusieurs, chacun d'eux est caractérisé par le fait qu'il est d'un seul tenant. En fait ce que nous faisons ici s'appellera dans la suite "analyse de la tâche". On remarquera aussi que la désignation des sommets du patron en tenant compte de ceux de la fig. (1) n'est pas évidente.



Mathématiquement, les invariants opératoires de ce problème sont: les faces, les arêtes, les sommets, les angles et les formes des faces pour la pyramide et pour le patron, les formes, les côtés, les sommets et les angles. Dans le cas d'une représentation en perspective il faudra tenir compte du parallélisme et des rapports de longueurs. Au niveau relationnel ce sont les relations d'incidence qui sont des invariants opératoires.

Psychologiquement¹³, il faudra prendre en compte le relief, la profondeur et les distances¹⁴ d'un objet réel à trois dimensions non encore perçu. Il faudra anticiper sur ce produit fini qu'est la pyramide cachée précédente et la construire pas à pas dans une "auto-évaluation continue". C'est cette auto-évaluation continue de l'élève qui fait évoluer la qualité de son traitement de l'information, c'est-à-dire de l'organisation interne de ses procédures. Et cette évaluation continue n'est pas de même nature qu'une évaluation-bilan médiatisée par l'enseignant à des moments précis de confrontation intragroupe ou inter-

¹². Une chronique de cette situation est relatée dans *ERMEL CM*. C'est intentionnellement que nous avons choisi cet exemple dans un document couramment utilisé.

¹³. J. Piaget cité par A. Cuvillier.

¹⁴. Cf A. Cuvillierin *Précis de psychologie* (t. II, p. 155).

L. ROYE

groupes et d'échanges. L'auto-évaluation continue devrait faire partie intégrante de la résolution.

Dans ce problème de la pyramide cachée, l'enfant part d'une SITUATION BRUTE. Il doit *rechercher* les informations, les *organiser* à un double niveau : celui du solide et celui du patron, les *traiter* et *valider* les résultats :

- les productions sont interprétatives puisqu'elles rendent compte de la signification d'un contenu donné, éventuellement à l'aide de représentations graphiques : les enfants doivent émettre les questions et communiquer les réponses avec précision, sous peine que les unes et les autres demeurent sans effet. Des inférences devront être faites pendant ce travail.

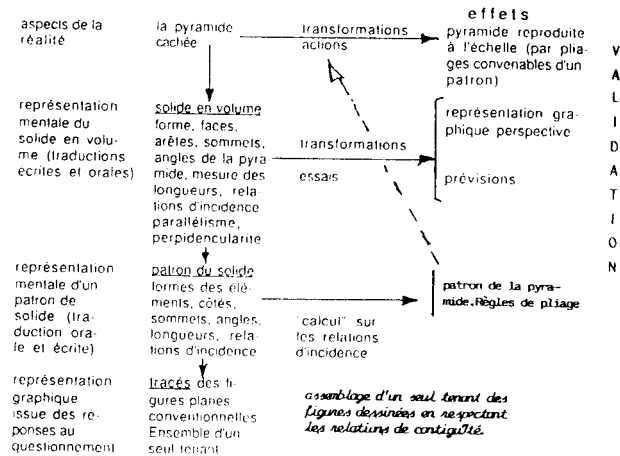
- cette exigence interne de précision touche l'aspect évaluatif de la production. Il s'agit, en effet, ici, de contrôler pas à pas ce qui est en train de se faire sous sa propre responsabilité. L'enfant s'auto-évalue de manière continue.

- des choix sont à faire parmi plusieurs procédures, parmi des questions à poser en fonction des réponses reçues, parmi des types de représentations graphiques : la production est divergente.

Certains élèves peuvent passer par des essais sur des représentations en perspective cavalière, nous avons rencontré de telles représentations au cours de la réalisation de séquences. D'autres élèves dessinaient des graphes planaires topologiques. Mais ici, ce sont les représentations verbales qui importent surtout, que ce soit dans la désignation, dans la communication et dans l'aide à la pensée. Le LANGAGE GÉOMETRIQUE des premiers apprentissages apparaît comme un langage de médiation entre la langue usuelle et le langage formel. Les transactions sont facilitées par les interventions de l'enseignant. Le langage géométrique doit être introduit pour rendre compte des "objets" de la pensée et des "actions" sur ces objets (concepts et articulations de ces concepts).

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

L'observation des séquences de classes nous a permis de produire le schéma suivant :



La description schématique ci-dessus correspond bien aux modèles précédents même s'il comporte deux types de signifiés (représentations mentales : un assemblage de formes planes dans l'espace, un autre dans le plan).

Cette situation-problème de la pyramide cachée est particulièrement exemplaire par :

1. son contenu
2. le mode de raisonnement de type hypothético-déductif
3. sa forme de travail didactique (alternance du travail collectif, de la recherche personnelle et des échanges intragroupes et intergroupes).

Le vrai problème didactique repose sur l'élaboration de représentations mentales par réactualisation d'invariants sur lesquels on pourra opérer et aussi sur la qualité de la structure comportementale qui organisera la procédure de l'enfant tant au niveau des signifiés qu'au niveau des signifiants.

L. ROYE

Dans la construction proprement dite de la pyramide, les enfants peuvent procéder de plusieurs façons : en particulier, s'ils s'intéressent à un succès rapide, leur procédure sera dite "momentanée" ; s'ils attendent qu'on leur dise ce qu'il faut faire elle sera peu active ; s'ils se lancent dans les essais par anticipation en analysant systématiquement les erreurs éventuelles elle sera dite alors procédure d'"analyse des fautes". Ces procédures sont organisées par des structures comportementales cognitives ou non cognitives suivant qu'elles reposent sur des activités conscientes ou sur des automatismes sans mobilisation de la pensée. Si l'on vise l'acquisition de compétences, c'est une médiation visant le développement des structures comportementales cognitives qui doit être au cœur de l'enseignement. D'où l'importance à donner au CALCUL RELATIONNEL, c'est-à-dire aux "compositions déductives qui rendent compte des productions de l'élève" ou mieux, en tenant compte du niveau, les rapports de causalité saisis et utilisés par l'enfant sans qu'il soit toutefois capable de les expliciter ou de les justifier (cf. G. Vergnaud et M. Artigue in *Recherches en Didactique* vol. 10, 2/3).

3.B. L'édifice de figures

On part cette fois d'une FIGURE. Il faut l'analyser pour la reproduire avec précision. Ici les prises d'informations se font sur des représentations graphiques par la voie des mécanismes sensoriels et par l'intervention de connaissances qui mènent à compléter ces données.

Dans les constructions géométriques, on utilise souvent une méthode dite d'analyse et de synthèse qui fonctionne implicitement même chez des enfants du cycle 1 quand ils reproduisent un assemblage de cubes par exemple. A ce sujet, rappelons que si les procédures d'actions sont organisées de l'intérieur, on dit que les structures comportementales sous-jacentes sont de type cognitif et que si elles reposent sur des automatismes sans mobilisation de la pensée, elles sont non-cognitives.

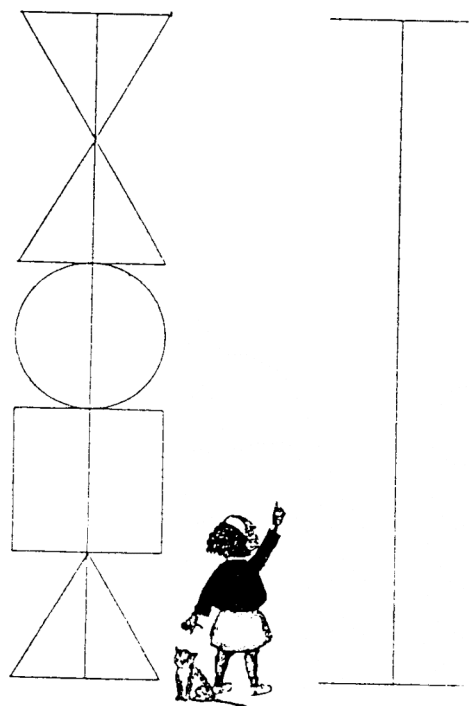
RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Analysons la méthode analyse-synthèse à partir d'une situation proposée dans le manuel de l'élève "objectif calcul" C.E.1. période 5, étape 9, page 148.

REPRODUIS AVEC LES OUTILS DE TON CHOIX. QUELS OUTILS AS-TU UTILISÉS ?

PÉRIODE 5 ÉTAPE 9 *Constructions géométriques*

PÉRIODE 5 ÉTAPE 9 *Constructions géométriques*



Reproduis la construction avec les outils de ton choix. Quels outils as-tu utilisés ?

L. ROYE

Les intentions pédagogiques de l'auteur sont précisées dans le livre de maître : apprendre aux enfants à analyser une construction pour la reproduire, à construire des figures géométriques avec différents instruments, à reporter des longueurs avec un compas. Des activités préparatoires sont prévues en vue de la réalisation de la dernière intention.

LA SITUATION-PROBLÈME

L'énoncé comporte trois données : la figure à reproduire, la consigne verbale et un embryon de construction. Deux contraintes doivent être prises en compte : l'utilisation d'instruments de dessin habituellement disponibles dans une classe de CE1 et, implicitement, un certain degré de précision.

On utilise habituellement la méthode dite Analyse-Synthèse pour résoudre des problèmes de ce type :

L'**analyse** d'une figure consiste à se ramener à la construction d'éléments simples comme des points géométriques dont on étudie les propriétés. Chacun d'eux est souvent considéré comme point de l'intersection de deux courbes facilement constructibles.

Les renseignements obtenus constituent la base de la **synthèse**, la base d'une construction à l'aide d'instruments adéquats (en général la règle et le compas, mais à l'école on utilise d'autres instruments comme le papier calque, un fond quadrillé, un réseau de points, du papier millimétré, une équerre, une règle graduée,...). On démontre alors que le résultat obtenu correspond bien à celui qui était demandé (à l'école, cette validation se fait souvent par simple constat).

Dans les problèmes spéculatifs, on détermine encore les conditions d'existence.

En fin d'année de CE1, on peut s'attendre à ce que les enfants identifient les différentes figures composantes (carré, cercle et triangles équilatéraux) et tentent de les construire. Le souci de précision et par suite la nécessité d'un auto-contrôle continu influent fortement sur l'organisation interne de la procédure.

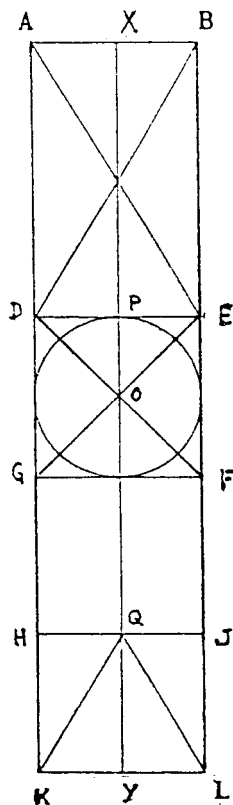
Analyse

Une première analyse consisterait donc à considérer l'une après l'autre les différentes figures composantes. Le sommet C du triangle (ABC) appartient à l'axe de symétrie (XY) de la figure. On peut reporter sur celui-ci la distance de X à C prise sur le modèle. On prolongerait [AC] et [AB] puis on reporterait les distances CD et CE et ainsi de suite...

Une autre analyse conduit à considérer le rectangle (ABLK). Les points D, G, H appartiennent au côté [AK] et les points E, F, J au côté opposé [BL]. Le centre O du cercle est le point d'intersection des segments [DF] et [EG]

Synthèse

D'où la construction :



Appelons [AB] et [KL] les deux segments perpendiculaires à (XY)

1° On joint A à K et B à L

2° A l'aide d'un compas on marque sur [AK] les longueurs AD, DG, GH prises sur le modèle. On fait de même pour marquer les points E, H, J sur le segment [BL].

3° On trace les segments [BD] et [AE] puis le segment [DE].

4° Le centre O du cercle est le point d'intersection des segments [DE] et [GE]. Soit P le milieu de [DE], le rayon du cercle est OP.

5° Le carré s'obtient en joignant G à F et H à J.

6° Soit Q le point d'intersection de [HJ] avec (XY). La construction s'achève en traçant les segments [QK] et [QL].

L. ROYE

Auto-évaluation

Elle peut être continue. En effet, le point C d'intersection de [AE] avec [BD] doit appartenir à (XY), le cercle (O) doit être tangent à (DE), les longueurs KQ et QL doivent être égales. L'identification de l'axe de symétrie de l'"édifice" apparaît comme très importante pour cette auto-évaluation.

Validation

A ce niveau elle se fera matériellement par superposition de la production et du modèle. Cette superposition est nécessaire puisque, par exemple, le point C peut appartenir à (XY) sans que, pour autant, les triangles ABC et DEC soient équilatéraux.

La réalité concrète de la situation précédente présente les aspects suivants : il s'agit de reproduire effectivement le modèle donné le plus fidèlement qu'il est possible de le faire, avec des instruments habituellement disponibles dans une classe de CE 1.

L'**analyse** est marquée par la DISSOCIATION de deux interprétations d'une même représentation graphique, la première relevant d'une perception immédiate liée à des formes données à l'avance, la deuxième procédant de l'INVENTION liée à une nouvelle organisation des signifiés. Il a fallu penser de nouveaux rapports entre les points géométriques représentés graphiquement par des intersections de droites.

Dans la **synthèse**, la composition logique de la construction effective et des propriétés des formes données initialement a permis un auto-contrôle continu et une validation terminale.

Mais revenons à l'INVENTION puisqu'elle est au cœur de la construction des connaissances. Dans "Science et méthode" Poincaré écrit, en parlant de ces propres découvertes, que le jeu de l'inconscient "n'est possible, et en tout cas, n'est fécond, que s'il est d'une part précédé et d'autre part suivi d'une période de TRAVAIL CONSCIENT. Abondant tout à fait dans ce sens nous pensons en particulier que, dans l'exemple précédent, elle n'est ni un passage de l'abstrait

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

(représentation mentale de l'"édifice") au concret (une représentation graphique), ni une simple intuition première, ni une inspiration du moment. Au contraire, allant des détails à l'ensemble, elle apparaît comme la perception articulée de nouveaux rapports, c'est-à-dire une perception enrichie par des connaissances antérieures. Et cette invention ne sera féconde dans la lente acquisition de compétences que si elle est suivie d'une exploitation médiatisée dans un bilan collectif.

Bien sûr, on ne peut pas tout inventer ou ré-inventer mais de l'étude que nous avons conduite semblent se dégager quatre opérations intellectuelles déterminantes dans l'enjeu de l'acquisition de compétences par la résolution de problèmes mathématiques. Ces OPÉRATIONS PRODUCTIVES qui s'entremêlent souvent dans l'action de l'enfant ont un trait commun. En effet, pour produire ces opérations mentales l'enfant est placé dans des situations plus ou moins nouvelles quant à la forme et/ou au contenu. Il ne peut en donner des solutions par la voie simple du rappel dans la conscience d'informations déjà mémorisées comme c'est le cas dans les EXERCICES de FIXATION et de CONSOLIDATION.

Issu de cette étude et de notre expérience, le tableau suivant précise les comportements cognitifs que l'on désirerait voir apparaître chez l'enfant au cours des résolutions de problèmes. Ces comportements sont exprimés en fonction des types de productions intellectuelles (interprétatif, convergent, évaluatif, divergent) et des étapes d'apprentissage décrites par R.M. Gagné (1970) et citée dans *Les fondements de l'action didactique*¹⁵ (1991).

¹⁵ - L'action didactique concerne le processus d'apprentissage de l'enfant guidé par l'enseignement du maître.

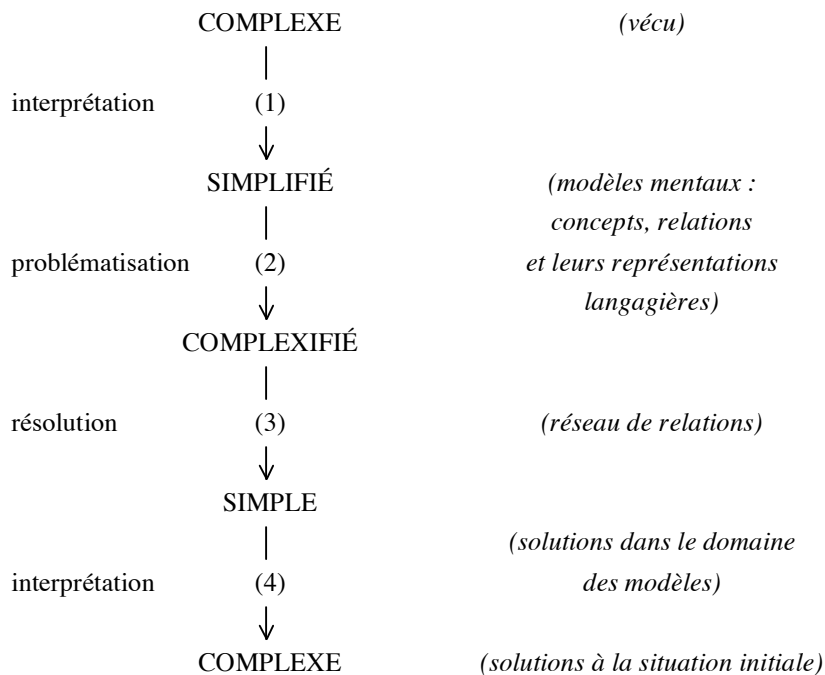
HIERARCHIE DES APPRENTISSAGES				
PRODUCTION DE L'ENFANT	REPRESENTATIONAL LEARNING (APPRENTISSAGE DE «LABELS»)	APPRENTISSAGE DE CONCEPTS	APPRENTISSAGE DE REGLES RELATIONS ENTRE LES CONCEPTS	PROBLEM SOLVING RELATIONS ENTRE RELATIONS CREATIVITE
PRODUCTION INTER- PRETATIVE D'INFOS	Perçoit, identifie, ordonne en chaîne les informations pertinentes. Discrimine. Associe des actions, des mots au lieu de les « manier séparément ».	Saisit localement (analyse) des informations. Explore systématiquement, recueille, coordonne, organi- se. Se construit des systèmes de références stables. Discrimine et désigne des objets et des actions en utilisant des étiquettes verbales appropriées. Reconnaît comme invariantes des propriétés non affectées par certaines transforma- tions (nombre, longueur...).	Dépasse les rapports entre les concepts qui ne seraient que des chaînes verbales. (Suite verbale des noms de nombres sans saisie de l'or- dre lié aux quantités). Etablit des rapports de cau- salité entre les propriétés d'objets et les actions. Analyse et clarifie. Explique. Explicite un raisonnement, le précise. Anticipe.	(La résolution d'un problème n'est pas possible par une simple reproduction). Rend compte de la significa- tion d'un contenu donné. Perçoit, analyse les rela- tions existant dans ce con- tenu. Explicite sous forme d'idées maîtresses. Structure. Communique une réponse avec précision.
DONNE DU SENS				

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

PRODUCTION CONVERGENTE D'INFOS APPLIQUE	Réagit spontanément aux sollicitations par des actions enchaînées observables (manifestations motrices d'opérations mentales).	Actualise de lui-même des informations acquises et adéquates pour dialoguer dans une situation problème en vue d'en trouver la solution (cette unicité est voulue par l'enseignant). Énonce des propriétés.	Utilise de lui-même des règles d'actions en les réactualisant à court terme, à long terme. Ces actions sont autant de manifestations motrices que d'opérations mentales.	Procède à des calculs relationnels en les réactualisant de lui-même. (ex : réactualisation de la transitivité).
PRODUCTION EVALUATIVE D'INFOS PENSEE CRITIQUE	Juge expérimentalement du choix de ses actions et de leur enchaînement. S'exprime dans un langage de récit. Saisit les actions déterminantes.	Formule avec plus de précision. Juge de l'efficacité de cette formulation, l'affine en conséquence. Juge après analyse de ses choix. Accepte une critique d'un médiateur.	Dialogue par essais/erreurs/réussites avec la situation et de ce fait abandonne ou poursuit une démarche. Juge du bien-fondé de sa démarche en anticipant le résultat (s'auto-évalue).	Contrôle et évalue ce qu'il est en train de faire pour transformer et réguler sa propre procédure sous sa propre responsabilité (eventuellement après médiation). Valide pas à pas. Prouve. Réajuste.
PRODUCTION DIVERGENTE D'INFOS PENSEE CREATIVE	Les actions élémentaires et l'ordre de celles-ci sont diverses mais mènent à des résultats identiques. Le « chaining » est transféré dans divers cadres mais les étiquettes verbales des actions restent contextualisées.	Se représente la situation et l'exprime dans différents systèmes de signifiants (numérique, géométrique, graphique).	Choisit des procédures différentes pour réaliser une même performance. Pose de nouvelles questions. Transpose et transfère sa procédure à des situations relatives à d'autres environnements.	Combine d'une nouvelle manière des règles acquises antérieurement pour former des règles d'un ordre supérieur (ex: approche de la division). Raisonne par analogie.

4. FACTEURS INFLUANT SUR LA RESOLUTION DE PROBLÈMES

L'image pédagogique traduite par des expressions du type : "du simple au complexe" ou "du facile au difficile" viennent cacher la réalité suivante :



Le cheminement schématisé ci-dessus ne s'effectue pratiquement jamais automatiquement dans l'apprentissage. Qu'est-ce qui déclenche donc l'"EUREKA !", c'est-à-dire le passage du complexe au simplifié ?

Le **COMPLEXE** est la situation-problème brute, qu'elle soit matérielle, matérialisée, simulée ou déjà représentée. Si l'enfant s'y implique, il le fait dans une globalité ou interagissent non seulement les éléments de cette situation mais aussi les éléments de sa personnalité, l'enseignant, la classe...

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

En fonction de connaissances antérieures, il s'agit alors d'isoler, pour les recomposer ensuite, les propriétés pertinentes de la situation afin d'interpréter intelligiblement le problème posé. Nous qualifierons de SIMPLIFIÉ le résultat mis en forme de cette élaboration, ou encore de MODELE MENTAL de la situation. Les objets qui le constituent peuvent être ou non, a priori, de nature mathématique. Leurs représentations perceptibles sont souvent de type verbal, scriptural ou gestuel ; bien qu'en rapport avec les éléments de la situation initiale, elles ne représentent pas directement ceux-ci. Ces représentations sont des signifiants des objets du modèle qui sont eux d'ordre cognitif.

Le problème initial est la source de nouveaux problèmes cette fois internes au modèle et dont la résolution semble possible à l'aide de théorèmes déjà élaborés dans l'univers COMPLEXIFIÉ de la théorie. Dans l'apprentissage on parle plutôt de théorèmes-en-actes ou de règles de conduite¹⁶ qui s'établissent dans les tentatives de résolution.

*"La pensée fonctionne de façon différenciée puisqu'elle travaille à plusieurs niveaux en même temps (éléments, classes, relations..., relations de relations...) et à l'aide de différents systèmes symboliques à la fois (langage naturel, représentation imagée, schémas, espace, etc...)"*¹⁷

Fruit du calcul relationnel que sont les compositions déductives, la ou les solutions aux problèmes internes au modèle apparaissent comme des règles d'action simples pour obtenir des réponses aux questions posées dans le complexe initial, encore faut-il que leur adéquation soit validée.

Ce cheminement cognitif amène l'enfant à rechercher des informations, à les sélectionner, à les REPRÉSENTER, à les organiser pour surmonter les obstacles et réduire les difficultés en problèmes plus SIMPLES à résoudre. Cette simplicité vient du fait que l'enfant problématise en fonction d'acquis ou de connaissances en formation. Il s'agit de pénétrer dans le COMPLEXIFIÉ par des re-crétations-en-actes locales. Encore faut-il que l'ATTITUDE qu'il adopte à l'égard

¹⁶- G. Vergnaud. in *L'enfant, la mathématique et la réalité* (1981)

¹⁷- Ibid.

L. ROYE

de la tâche à accomplir le porte à l'analyse structurante des données avant de se lancer consciemment dans une procédure.

Mais les modes de fonctionnement d'un enfant dans les activités intellectuelles de résolution de problèmes sont-ils constants ? De quels facteurs dépend la qualité de telle ou telle résolution ? Ces questions sont importantes en didactique si l'on reconnaît que les comportements cognitifs sont susceptibles de transformations et que les aptitudes se développent par la pratique. Les compétences citées dans les Instructions Officielles sont-elles autre chose que des aptitudes reconnues, c'est-à-dire évaluées ?

Gagné et Ausubel distinguent des variables ou facteurs qui influent sur l'apprentissage. Ils divisent ces facteurs de deux façons : les facteurs intrapersonnels et les facteurs situationnels. Reprenant cette classification dans le cas plus particulier de la résolution de problèmes nous envisagerons des facteurs intrapersonnels puis des facteurs situationnels incluant des facteurs interpersonnels. Ces derniers ont déjà apparu dans la situation de la pyramide cachée où la communication jouait un rôle déterminant.

a) Facteurs intrapersonnels

- Structure cognitive

Notion-clé dans l'œuvre d'Ausubel, cette structure nous intéresse particulièrement pour notre étude puisqu'elle détermine souvent le processus de résolution et la qualité de celle-ci : "Le facteur le plus important influençant l'apprentissage est la quantité, la clarté, et l'organisation des connaissances dont l'élève dispose déjà. Ces connaissances déjà présentes, constituées par des faits, des concepts, des relations, des théories et des données non-issues des perceptions dont l'élève peut disposer à tout instant s'appellent sa structure cognitive" (D.P. Ausubel *School learning* 1969).

D'après Ausubel, les connaissances de quelqu'un à un moment donné présentent une organisation hiérarchisée. Dans cette construction hiérarchisée, les *idées-clés générales stables* se trouvent au sommet et les *contenus plus spécifiques, moins stables*, aux niveaux infé-

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

rieurs. On rejoint ici les concepts d'invariants opératoires stables et de représentation calculable.

Pour *acquérir intelligemment des compétences* par les résolutions de problèmes, il s'agit donc, pour l'enfant, *de mettre en rapport l'enseignement reçu par celles-ci avec sa structure cognitive du moment et, à la fois, de la préparer à recevoir de nouveaux contenus tant notionnels que relationnels.*

- Attitude et rapport aux savoirs mathématiques

L'attitude est la disposition de quelqu'un qui n'est pas encore passé aux actes. Elle est directement liée aux modes de fonctionnement caractéristiques et relativement constants de l'enfant en relation avec les activités intellectuelles, sa perception et son rapport aux savoirs mathématiques.

- Entraînement

Par une pratique fréquente, la résolution de problèmes produit des résultats plus ou moins durables et grâce auxquels de nouvelles potentialités de l'enfant se forment ou d'autres, existantes, se modifient. De réceptive, son attitude peut devenir beaucoup plus analytico-structurale par exemple par l'habitude prise de l'analyse systématique des erreurs dans la méthode essais-erreurs. La qualité de la procédure en bénéficie. Dans la médiation situation/enfant par l'enseignant une contre-argumentation développée par celui-ci peut provoquer l'anticipation d'un résultat et amener l'enfant à l'abandon d'une voie qui ne déboucherait pas sur ce qu'il espérait.

- Développement cognitif

Il s'agit du stade ou de la phase du développement cognitif du point de vue génétique dans les conceptions de Piaget et des systèmes de connaissance : système moteur, système iconique et système symbolique (J.S. Bruner in *Studies in cognitive growth*, 1966). Actuellement, il est reconnu que des comportements déterminés, dont on croyait qu'ils étaient étroitement liés aux processus de maturation, peuvent être accomplis plus tôt, à condition qu'on fasse participer les

L. ROYE

enfants à une instruction appropriée (voir en particulier dans *Langage et pensée* de Vygotsky : Zone de développement prochain).

- Motivations

Nous ne traiterons pas de cet important facteur dans cet article, considérant que son étude est suffisamment répandue.

Les facteurs intrapersonnels que nous venons d'évoquer interagissent dans la résolution de problèmes avec les facteurs situationnels et interpersonnels dont il va être question maintenant.

- Relation de l'enfant aux signifiants :

"La fonction du *langage* et des *autres signifiants* est triple :

. aide à la désignation et donc à l'identification des invariants,

. aide au raisonnement,

. aide à l'anticipation des effets et des buts, à la planification et au contrôle de l'action" (G. Vergnaud in *Champs conceptuels*).

Le fait que l'enfant puisse recourir à des formes variées du langage naturel semble déterminant dans la résolution de problèmes. Mais l'apprentissage au symbolisme conventionnel est indispensable puisque celui-ci réalise à la fois une aide à la pensée et à la COMMUNICATION.

b) Facteurs situationnels et interpersonnels

Dans la théorie des champs conceptuels, G. Vergnaud met l'accent sur le *rôle essentiel des concepts mathématiques dans l'analyse de la complexité des situations*, à son avis cette analyse ne saurait se réduire à celle de la difficulté d'une tâche elle-même décomposable en sous-tâches, etc.... *Les champs conceptuels résultent d'une "classification de relations de base et de classes de problèmes qu'on peut générer à partir d'elles"*. C'est ainsi qu'il parle du champ conceptuel des structures additives dans son article "*La théorie des champs conceptuels*" (in *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 10, 2/3, 1991).

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Dans le même article, il souligne la difficulté d'établir systématiquement une telle classification à partir de situations habituelles de vie puisque "les données y sont immergées dans un ensemble d'informations peu ou pas pertinentes, sans que soient toujours clairement exprimées les questions qu'on peut se poser. De telle sorte que le traitement de ces situations suppose à la fois l'identification des questions et celle des opérations à faire pour y répondre".

A l'école, on parle souvent du concret, de faux concret... Nous référant aux I.O. de 1985, à la théorie des champs conceptuels et à nos visites de classes, nous distinguons trois types de situations :

1° Des situations empiriques¹⁸

Ce sont celles qui mènent à l'élaboration d'une notion ou à l'extension d'une connaissance locale, l'une et l'autre dans un champ conceptuel bien déterminé. Par la résolution de ces situations l'enfant devrait, psychologiquement, ressentir la nécessité d'une nouvelle organisation de ses connaissances, d'apports nouveaux (*signifiants et signifiés*) et, mathématiquement, en éprouver la validité. Ces situations devraient donc apparaître comme assez épurées quant aux informations, *ce qui ne veut pas dire non-signifiantes pour lui*.

2° Des situations théoriques¹⁹

Ce sont celles où tous les invariants opératoires nécessaires à leur résolution constituent le texte même de la consigne ou de l'énoncé. Il s'agit ici d'application immédiate, de consolidation et d'acquisition de compétences (au sens d'aptitudes reconnues puisque évaluées) dans le domaine mathématique, qu'elles soient notionnelles ou méthodologiques.

¹⁸- De l'expérience (perceptivo-motrice ou notionnelle) au concept.

¹⁹- Des concepts à leurs articulations possibles : conjectures, inférences,...

3° Des situations soit pragmatiques soit spéculatives²⁰

Ce sont celles où le ou les cadres de recherche ne sont indiquées d'aucune manière, celles où apparaissent des contraintes matérielles ou psychosociologiques et qui donnent l'occasion de problématiser, de choisir, de décider. Dans tous les cas elles doivent pouvoir être résolues par des moyens logicomathématiques. Appartiennent également à ce type les situations qui demandent une traduction des données dans différents champs conceptuels.

Ces trois types de situations visent l'intégration de notions ou de méthodes à la structure cognitive et aussi la préparation de celle-ci à de nouvelles acquisitions.

- Le contenu d'une situation problème

On a vu que l'analyse notionnelle magistrale préalable du contenu joue un rôle essentiel dans la détermination des compétences nécessaires à la résolution.

Du type des objets mathématiques réalisant la notion en jeu dépend la qualité d'organisation interne des procédures de résolution. C'est ainsi qu'au Cycle II par exemple, les objets "nombres qui servent à compter", "nombres qui servent à dénombrer", "nombres pour mémoriser les quantités", "nombres qui servent à mesurer", "nombres qui servent à calculer", réalisent la notion de nombre entier en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Précisons, pour nous écarter de la boutade "notion de concept et concept de notion", que nous entendons par concept un objet construit par l'esprit et permettant d'organiser les perceptions et les connaissances dans différents cadres.

Le contenu, qui doit être bien cerné, comporte donc dans la situation, l'ensemble des invariants opératoires tant notionnels que rela-

²⁰ - Des concepts et de leurs articulations à :
- des choix d'actions, de décisions d'ordre empirique
- des choix d'actions, de décisions d'ordre spéculatif
- des choix réévaluant les interactions possibles entre les deux domaines précédents
lesquels, quoiqu'indépendants à priori, ne manquent pas d'interférer dans le vécu concret.
(Échanges avec I. Chelkowsky, professeur IUFM Lille - Août 1993.)

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

tionnels (notions mathématiques, propriétés, relations) et l'ensemble des représentations symboliques langagières et non-langagières. Insistons encore sur l'importance de l'activité langagière dans sa triple fonction de représentation dans la *désignation*, la *communication* et l'*aide à la pensée* :

- . représentation des éléments pertinents de la situation,
- . représentation de l'action,
- . représentation des relations entre l'action et la situation.

La structuration des contenus a été abordée sur le plan général dans le paragraphe 1.

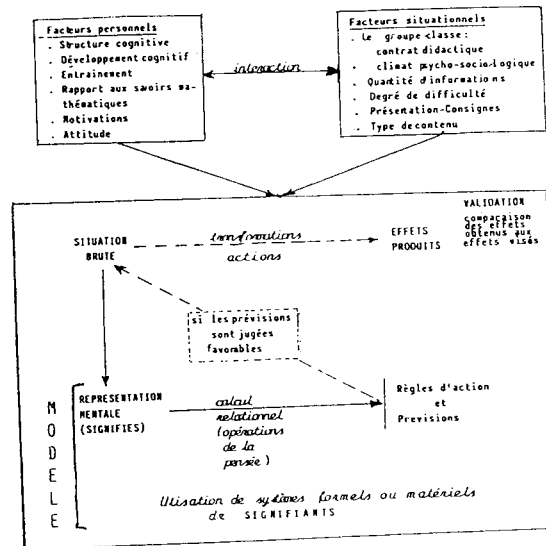
- **Le contrat didactique** régit les relations enseignant/élèves en fixant les attentes et les obligations de chacun quant à l'action didactique (il est défini par G. Brousseau dans sa thèse de Doctorat).

- **La quantité d'informations** qui sont à trier, à sélectionner, à organiser, quelquefois à compléter, est aussi un facteur situationnel important. On connaît, par exemple, les difficultés de remise en ordre chronologique d'informations données en vrac.

- **Le degré de difficulté** dépend de la quantité d'informations mais il doit être axé sur l'analyse du contenu modulé par les valeurs données aux variables didactiques.

- Enfin, **la présentation et la précision des consignes** sont souvent déterminantes quant aux attitudes des enfants dans la mise en route de l'activité.

On peut représenter schématiquement les facteurs influant sur la résolution de problèmes et le processus de résolution de la manière suivante:



5. CHOIX DES SITUATIONS-PROBLEMES

5.1. Intentions pédagogiques de l'enseignant

Chaque enseignant doit choisir des situations-problèmes et des exercices en fonction de ses intentions pédagogiques.

Celles-ci sont quelquefois appelées "objectifs pour le maître" pour soulever plus clairement les problèmes de l'examen intentionnel et systématique de l'action didactique. Et il s'agit surtout de savoir si une (des) situation(s) choisie(s) permettra(ont) de définir des objectifs concrets (objectifs d'apprentissage opérationnalisés) contribuant effectivement à la réalisation d'objectifs plus généraux (compétences à acquérir) attendus et aussi de prendre en compte des facteurs personnels des élèves et des facteurs situationnels²¹. Ceux-ci déterminent

²¹- Ces deux types de facteurs du modèle de Span, Van Parreren, Gagné et de De Corte sont décrits dans *Fondements de l'action didactique*, Ed. De Boeck.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

souvent l'adoption ou le rejet de telle ou telle situation lors de la définition précise d'une tâche à accomplir.

Ce qui n'échappe sûrement pas aux enseignants dans la prise de décisions, ce sont les points suivants :

1. Les situations choisies doivent être *signifiantes pour l'enfant* afin qu'il puisse donner du sens à l'entreprise d'une démarche de résolution.

2. Les situations doivent développer la capacité à interpréter, à sélectionner les éléments utiles du passé pour accomplir une tâche déterminée (fonction de dissociation), à évaluer ses productions de façon continue, à valider, à changer de point de vue en cas d'impasse ou d'erreur.

3. Suivant les cas, les situations doivent faire ressortir la nécessité de construire une nouvelle procédure faisant appel à des conceptions plus élaborées d'objets de connaissance ou viser la maîtrise de celles-ci par optimisation des structures du comportement cognitif (organisation interne d'une procédure).

4. Les situations doivent permettre l'évaluation de l'action didactique non seulement au niveau des élèves mais aussi au niveau de l'enseignant. En ce qui concerne les élèves, il ne s'agit pas seulement d'apprécier leurs processus de résolution, au besoin de les guider²² (évaluation formative). Pour ce qui est de l'enseignant, il est important qu'il pratique son auto-évaluation avant de mettre en place l'évaluation sommative de ses élèves. En effet, il arrive que les objectifs effectivement atteints ne correspondent pas exactement aux objec-

²²- Vygotsky *Le langage et la pensée*.

Cf. P.J. Galp'rin in *Problem der lern théorie*, 1972.

1° orientation vers la tâche

2° comportement au niveau matériel

3° comportement au niveau verbal

4° comportement au niveau verbal (pour l'analyse des tâches dans l'apprentissage de la lecture)

L. ROYE

tifs attendus. Cette auto-évaluation empirique²³ devrait amener à une révision constructive de l'action didactique future. Par exemple, dans la situation de la pyramide, il a paru nécessaire de mieux moduler dans le temps les phases d'activités, c'est-à-dire les phases de questionnement par des bilans ponctuels plus fréquents. Au cours de ceux-ci les enfants se livraient à des essais de représentations graphiques ou de constructions effectives.

5° Les situations-problèmes choisies doivent aussi, en particulier dans la phase initiale d'apprentissage, rendre pratiquement nécessaire la communication entre élèves. La situation de la "pyramide cachée" est exemplaire à cet égard. En effet, la communication ne s'y limite pas à une simple description, mais elle s'y développe logiquement comme aide à la pensée. Le besoin de renseignements la justifie et lui donne du sens. Le langage s'y précise pour devenir un langage de preuve. Pour l'enseignant, il s'agit là d'une possibilité d'évaluation dans des circonstances naturelles.

Ces "CONDITIONS DIDACTIQUES" que nous venons de ranger dans les intentions pédagogiques de base de l'enseignement permettent de préciser plus concrètement, au quotidien, des critères de choix.

5.2. Critères de choix des situations-problèmes

5.2.1. Le modèle de base des enfants

La situation choisie doit permettre à l'enfant de s'appropriier les problèmes et de s'engager dans des tentatives de résolution en *coordonnant ses acquis antérieurs*. A ce propos, si l'on retient les thèses de Bruner et de Piaget, à savoir que le développement cognitif se fait via trois modes de connaissance : système moteur, système iconique, système symbolique, il ne faut pas opposer ces trois systèmes l'un à l'autre. Il s'agit d'une approche des réalités qui est qualitativement

²³- Cf *Les fondements de l'Action didactique*, p. 308 pour plus d'information.

autre dans chaque cas. (cf par exemple l'enseignement des handicapés moteurs).

5.2.2. Les actions des enfants : les 8 verbes

Les situations-problèmes doivent permettre aux enfants d'être actifs, c'est-à-dire de PRÉVOIR ou d'ANTICIPER en s'INFORMANT, en TRAITANT les informations, en PROBLÉMATISANT, en RÉSOLVANT, en COMMUNIQUANT et en VALIDANT.

Par exemple, dans la reproduction de l'édifice de figures, il faut PROBLÉMATISER, TRANSFORMER les problèmes en dépassant la perception globale première des formes, pour satisfaire l'exigence de précision : on isole la configuration des points qui seront constructibles par des méthodes plus fiables. Il peut s'agir d'un véritable conflit cognitif interne.

Le fait qu'il existe plusieurs façons d'organiser le questionnement pour obtenir des renseignements sur la pyramide amènera les enfants à confronter leurs points de vue dans un débat peut-être de type conflictuel.

Dans le problème de la pyramide cachée on PRÉVOIT lors du questionnement, on ANTICIPE lors de la construction proprement dite. On a déjà souligné les simplifications apportées par un langage géométrique adapté comme aide à la désignation, à la communication et plus généralement comme aide à la pensée. Le "simplifié" que constitue le langage géométrique est dû, à notre avis, aux deux raisons suivantes :

1° l'"objet" géométrique désigné par un mot ou une figure, lesquels en sont des signifiants, est lui-même descriptible en peu de mots en fonction d'"objets" plus élémentaires que sont les points.

2° la signification d'un mot est claire car il coïncide avec l'intuition spatiale de la notion géométrique correspondante. Emprunté aux "Éléments d'Euclide" tout imprégnés de la topographie, il est souvent métaphorique. C'est ainsi que l'on parle de sommet, d'élever la perpendiculaire, etc...

5.2.3. La place dans la progression

Ce critère est fondamental. Qu'a-t-on fait avant ? Que fera-t-on après ? Rejoint-on des objectifs généraux ? Lesquels ? Plusieurs approches sont-elles prévues ?

Se trouve ainsi posé le problème des progressions. Ce que l'on peut dire ici, c'est que la progression établie à l'avance devra être à même de "modifications résultant des possibilités des enfants" (facteurs personnels).

Citons deux types de progression habituellement rencontrées :

a. La progression linéaire dans laquelle tous les élèves suivent la même filière d'apprentissage organisée logiquement en se référant à l'évolution d'une théorie mathématique. Par exemple, pour la construction des entiers, on s'exerce aux tris et sériations puis aux classements et rangements pour en arriver au *nombre*²⁴ par une "synthèse originale" de son aspect cardinal et de son aspect ordinal²⁵. On risque alors de ne pas être attentif à l'inattendu, à savoir l'utilisation précoce d'acquis culturels (aspect ordinal) pour résoudre des problèmes numériques. On s'adapte bien sûr aux rythmes personnels des enfants pour suivre la progression, mais les objectifs de *soutien* ne sont formulés qu'après coup en vue d'une aide motivée par un *échec*.

b. Dans la progression ramifiée, à la fin d'une suite de séquences, les différents élèves de la classe atteignent des objectifs différents, mais tous réalisent des objectifs minima communs (connaissances, conceptions, aptitudes, compétences, attitudes). Ceux-ci sont indépendants des performances moyennes de la classe à un moment donné et des résultats insuffisants pour un point ne sauraient être compensés par de bonnes prestations pour un autre point. De même, ces objectifs de base sont réalisés par des voies différentes (*objectifs différenciés* tenant compte des différences intrapersonnelles et interperson-

²⁴- D'après l'axiomatique de Cantor-Russel.

²⁵- J. Piaget in *La genèse du nombre*.

nelles des élèves quant à la quantité du contenu, à la plus ou moins grande difficulté de celui-ci et aux intérêts des apprenants).

Par exemple, au CE 1, tous les élèves peuvent reproduire la figure proposée dans le paragraphe 3.B. mais à partir d'instruments différents. En particulier, ils pourraient utiliser un fond quadrillé, un réseau de points parmi lesquels il faudrait choisir ceux qui conviennent, etc... Autrement dit les différentes valeurs attribuées aux VARIABLES DIDACTIQUES²⁶ permettent aux enfants d'obtenir un résultat acceptable mais par des moyens et par suite par des procédures différentes. Il se peut qu'aussi qu'avec les mêmes moyens matériels, les qualités de l'organisation interne des procédures soient variées. Ce difficile problème de progression fait pour nous l'objet d'une recherche dans le cadre de l'IUFM Nord-Pas de Calais.

En plus de la VARIÉTÉ de ces situations, il faut veiller aussi à leur COHERENCE d'ensemble pour viser l'acquisition de compétences générales.

5.2.4 La structuration des savoirs et le contrôle de maîtrise

Un ensemble de situations doit encore permettre aux enfants d'intégrer une nouvelle notion ou un nouvel algorithme²⁷ dans l'univers de leurs connaissances et de leurs savoir-faire par réélaboration complète du tout²⁸ *en donnant du sens à cette intégration, et ceci en particulier au niveau des objectifs de base*. Ici la médiation du maître est tout à fait primordiale quant à la fixation et au transfert de ces notions dans des contextes différents de celui de l'apprentissage (en particulier dans les productions divergentes d'informations).

Mais quels savoirs ou quels savoir-faire faudrait-il que les enfants fixent dans des situations comme "Le partage des cartes" ou comme "La pyramide cachée" ? Tout dépend en définitive des pro-

²⁶ Variable didactique : variable sur laquelle on peut jouer pour changer qualitativement le comportement cognitif de l'enfant ou/et la stratégie du maître.

²⁷ Algorithme : suite finie d'actions menant à un résultat et telles que chacune d'elles dépende de la précédente.

²⁸ P. Gréco in *Encyclopédie Universalis* ("Enseignement des mathématiques").

ductions des élèves et de leurs procédures, en particulier en ce qui concerne l'inattendu. Dans la deuxième situation, certains élèves ont représenté la pyramide par *une* projection dans son plan de base obtenant ainsi un graphe planaire topologique. Fallait-il approfondir cette notion ? Nous pensons que dans cette situation précise une confrontation dans le groupe de production suffisait. Autre chose serait de faire prendre conscience d'une erreur dans les représentations ne respectant pas une relation d'incidence.

Dans le problème de la reproduction de l'édifice il y a lieu d'insister sur la commodité qu'apporte la dénomination de points par des lettres pour communiquer sur les noms propres des formes. La cohérence des descriptions relatives à la pyramide en volume et à son patron doit être tout à fait explicitée et mise en évidence. Enfin, la prévision des mesures et le degré d'approximation seront déterminés en rapport avec l'objet à construire.

Dans les deux cas, il est possible de mettre au point un questionnement optimal en particulier pour dégager l'intérêt de l'organisation des informations afin de traiter celles-ci par conjecture ou par déduction.

Les situations doivent permettre de contrôler l'acquisition PROGRESSIVE de compétences. Il appartient donc à l'enseignant de recueillir des informations sur les compétences initiales des enfants. Une évaluation intermédiaire entre "tests initiaux" (compétences premières) et évaluation terminale (compétences du programme) est souhaitable.

Elle permet à l'enseignant de mettre au point au moment voulu le processus enseignement-apprentissage, le choix d'objectifs différenciés et la médiation objectifs-maîtres.

Nous n'allons pas entrer plus à fond dans le problème de l'évaluation. Notre propos consiste seulement à préciser que les situations-problèmes présentées aux élèves doivent pouvoir contribuer à l'évaluation nécessaire prévue par les textes officiels et cette évaluation doit correspondre aux compétences à acquérir.

CONCLUSION

Si on se fixe comme objectif que l'enfant doit être en mesure de reproduire une information donnée de façon correcte et rapide, l'activité d'apprentissage toute indiquée est la présentation de cette information sous forme structurée. Viennent alors la mémorisation et la répétition. C'est un choix pédagogique.

Mais si on se propose d'acheminer l'enfant vers l'acquisition intelligente de compétences, la résolution de problèmes est sans doute la voie la plus appropriée surtout si, en plus, on a l'intention de faire éclore une attitude analytique et structurale (celle qui mène à des procédures actives et structurantes). La méthode de la découverte autonome ou médiatisée et de l'assimilation personnelle par des exercices est parfaitement adaptée. A propos de cette méthode et de la médiation, nous pensons que l'enfant peut aussi s'approprier des savoirs et des savoir-faire qu'on lui indique ou qu'on lui montre dans le but de résoudre des problèmes mais, en tous cas, au cours d'une recherche personnelle. C'est tout le sens à donner à l'activation chez l'enfant de la fonction de dissociation, c'est-à-dire celle permettant de sélectionner les éléments utiles du passé et de surmonter des obstacles pour accomplir une tâche déterminée. C'est encore le sens à donner à une médiation qui se réalise par une contre-argumentation par anticipation des résultats qui pourraient ou ne pourraient pas être obtenus en réponse aux suggestions des enfants, un constat terminal restant toujours possible pour les plus réticents. Une telle manière de pratiquer n'entraîne d'ailleurs en aucune façon la sous-estimation du RÔLE ACTIF de l'enfant car on s'intéresse surtout à la qualité du traitement des informations, c'est-à-dire à l'ORGANISATION INTERNE DES PROCÉDURES.

En guise de conclusion, nous allons refondre les différents points abordés dans cet article sous forme d'un guide d'auto-évaluation de l'action didactique dans les résolutions de problèmes mathématiques à l'usage des enseignants. Dans cette auto-évaluation, il s'agit de déceler et d'interpréter les points faibles et les succès ponctuels d'un enseignement et non de nous engager dans une analyse

L. ROYE

source d'une inquiétude angoissante devant l'ampleur de la tâche.
Voici ce guide :

1. But

Le but de l'auto-évaluation de l'enseignant dans l'action didactique est double :- rassembler des informations provenant d'un examen intentionnel et systématique de sa contribution à l'action didactique, tant dans sa phase de préparation que dans sa phase de réalisation, avant de procéder à l'évaluation sommative des élèves.

- prendre des décisions basées non seulement sur l'analyse des résultats scolaires des élèves mais aussi sur celle du processus complet d'un enseignement-apprentissage et visant une optimisation de cet enseignement.

2. Objets de l'auto-évaluation

Ces objets seront dégagés de la cohérence interne entre, d'une part, les comportements cognitifs des élèves et, d'autre part, les interventions et décisions de l'enseignant.

apprentissages		action didactique
facteurs personnels	<->	état ou situation de départ de l'enfant-intérêts
facteurs situationnels formes de travail didactique et contenus	<->	choix des situations-organisation matérielle
circonstances	<->	phase de réalisation
procédure	<->	activité d'apprentissage de l'enfant
structure comportementale et performance	<->	objectifs effectivement poursuivis
apprentissage intelligent	<->	structuration des savoirs-transférabilité
maîtrise ou perfectionnement d'un comportement	<->	évaluation sommative des élèves

3. Critères d'évaluation

Ce sont les critères par lesquels on juge de la valeur et de l'efficacité des choix qui ont été faits.

Méthodes et critères d'auto-évaluation apparaîtront en filigrane dans le paragraphe suivant. Celui-ci n'aura certainement pas la généralité d'une théorie, il veut tout au plus contribuer à l'optimisation de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la résolution de problèmes, signe d'une pédagogie qui s'élabore, se construit et se renouvelle.

4. Éléments pour une auto-évaluation de l'action didactique dans les résolutions de problèmes mathématiques

4.a. Analyse globale

. *impression générale* : satisfaction ou insatisfaction quant à l'intérêt pris au travail effectif, à la réalisation des objectifs. La compétence à acquérir était-elle à la base des décisions prises ?

. *l'attente* : Était-elle trop ambitieuse ? différenciée ? Y a-t-il eu concordance entre l'état initial des élèves et la quantité d'informations, la difficulté de résolution ?

. *la stratégie d'enseignement* :

La situation choisie correspondait-elle vraiment aux intentions pédagogiques ? Les objectifs étaient-ils clairement définis ?

Les formes de travail didactique étaient-elles en accord avec les objectifs spécifiques à la situation (travail individuel, travail collectif, travail par groupes éventuellement suivant les phases d'activité, utilisation de médias tels que fiches, matériel, ...) ? Formes différenciées.

Le temps a-t-il été bien géré ? Les durées de chaque phase d'activité ont-elles été en relation avec les facteurs personnels et situationnels ? Des prolongements étaient-ils prévus ?

Une différenciation dans la médiation "rapport au savoir des élèves" a-t-elle été possible ? dans le temps ? quant à la disponibilité de l'enseignant ?

La communication entre élèves était-elle prévue ? occasionnelle ? obligatoire ?

L. ROYE

4.b. Analyse locale

Ce paragraphe est divisé en deux parties qui pourront être lues côte à côte progressivement. La première concerne les comportements de l'enfant (comportements observables comme manifestations des opérations mentales) en apprentissage. La deuxième est un questionnement contingent à la première et relatif aux décisions et interventions de l'enseignant dans son rôle de médiateur au cours du processus de l'action didactique.

Comportement des élèves	Décisions et interventions de l'enseignant
Attitude des élèves	
La mise en situation a-t-elle été rapide ? Compréhension de la consigne. Appropriation du problème. Signification donnée par les élèves à la performance à réaliser. Le produit fini a-t-il été clairement perçu ? L'attitude des élèves était-elle plutôt passive, plutôt active, plutôt structurante (tendance à des essais structurés), plutôt réceptive (désir de résoudre mais attente de la solution) ? Plutôt globale, plutôt analytique ? Respect du contrat didactique. Les élèves sont-ils convaincus de l'intérêt ou de l'utilité du travail de résolution ?	Le produit fini a-t-il été explicité ? La formulation de la "consigne" permettait-elle une mise en situation rapide ? Y a-t-il eu évaluation de l'appropriation du problème ? Sous quelles forme ? Y a-t-il eu médiation "situation-élève", problème-élève ? A-t-elle été personnalisée ? Réactions devant l'attitude des élèves, de certains élèves. Les interventions ont-elles respecté les formes de travail didactique suivies (interventions dans chacun des groupes, individuelles, etc...) ? Rapports attitude de l'enfant, attitude de l'enseignant ? Le contrat didactique a-t-il été clairement perçu et respecté ?

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Les procédures et les structures comportementales des élèves

Certains élèves ne s'intéressaient-ils qu'à un succès rapide ? Ou au contraire les tentatives de résolution procédaient-elles d'une manière systématique (anticipation sur les effets d'une action possible, réajustement, recherche d'informations, actualisation et mobilisation d'acquis antérieurs) ? Attitude cognitive, non cognitive

Les tentatives de résolution ont-elles été faites sur des représentations spontanées ? imposées ? de quelle nature : équationnelle, graphique, mimée, simulée sur des matériels ?

Les obstacles et les erreurs ont-ils fait évoluer les conceptions, les structures comportementales ? Ces erreurs ou ces obstacles ont-ils donné lieu à l'élaboration de "tactiques" au coup par coup sans modifier la stratégie (procédure initiale) de résolution ?

Ont-ils provoqué l'abandon de la stratégie ? Dans ce cas, a-t-il été constaté un refus de recherche nouvelle ? Modification d'attitude.

Y a-t-il eu un "eureka" explosif ? Plusieurs ? Certains élèves ont-ils alors travaillé par imitation ? La procédure dictée a-t-elle donné lieu à des structures comportementales (mise en relation d'actions observables manifestant une coordination d'opérations mentales) différentes ?

Y a-t-il un apport magistral d'informations ? Une invitation à une recherche de documentation ?

Y a-t-il eu médiation de l'enseignant : situation / procédure explicitée, situation / actions procédurales, procédure / anticipation du résultat ? Par quels moyens : invitation à la représentation langagière, graphique, équationnelle pour permettre des opérations mentales et la prise sur le raisonnement en cours ?

Y a-t-il eu médiation élèves / élèves ? Les formes de travail ont-elles été différenciées suivant les besoins de certains élèves ?

La médiation a-t-elle menée à la prise de conscience d'erreurs et en conséquence à un réajustement ? Celui-ci a-t-il été spontané ? incité, imposé ? Cette médiation a-t-elle donné lieu à une évaluation formative ? Quelle activation des opérations mentales ?

Y a-t-il eu incitation à l'abandon d'une procédure ? Par quel type d'intervention ?

Réaction devant la lassitude ou le découragement. L'organisation matérielle permettait-elle une intervention personnalisée ? une contre-argumentation ?

L. ROYE

Réaction devant l'“euréka” : arrêt de la recherche de ceux qui n'ont pas encore trouvé la solution ? Modération d'un conflit cognitif éventuel ? Une explication est-elle donnée ? Par qui ? Y avait-il plusieurs démarches possibles ? Plusieurs solutions ?

L'analyse des contenus mathématiques (notions et procédures) a-t-elle permis la disponibilité et la prise en compte de détours inattendus (analyse de la genèse des contenus par exemple, patrimoine de l'enseignant).

Rapidité de compréhension des démarches, recensement rapide des acquis et des lacunes au niveau notionnel, au niveau du raisonnement.

Les performances

Cohérence du résultat et du problème initial.

Formes du résultat : résultat complet, précis, formulé, rédigé.

Y a-t-il eu un désir de contrôle, de validation, de preuve. Reconnaissance d'erreurs.

Tous les élèves ont-ils donné un résultat ?

Doit-on convaincre par une preuve formulée, par constat simple ? un autre élève, l'enseignant, la classe, un groupe ?

A-t-on imposé une validation ? Niveau d'exigence : précision, présentation, formulation.

Les élèves se sont-ils contentés de la simple approbation de l'enseignant ?

Attitude de l'enseignant vis à vis de ceux qui n'ont pas terminé, de ceux qui n'ont pas réussi.

RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES

Bilan : institutionnalisation et structuration

Intérêt des élèves pour le corrigé ?	Forme de la correction : un élève au tableau, magistrale, échanges entre élèves ?
Attention, compréhension, acceptation d'une méthode différente. Reconnaissance d'erreurs.	Le travail de chacun est-il pris en compte ? Type de renforcement.
Ont-il appris une nouvelle notion, une nouvelle procédure, perfectionné une compétence ? En sont-ils conscients ?	Fixation de l'acquis. Est-elle personnalisée ?
Les élèves intègrent-ils la notion nouvelle, si c'est le cas, aux acquis antérieurs (apprentissage intelligent) ?	La résolution du problème proposé engendre-t-elle un nouveau problème suscitant un regain d'intérêt. Si les élèves prennent le corrigé par écrit, quelle sera la destination du document ?
Une différenciation dans le mode de correction a-t-elle eu lieu ? Pourquoi ?	
Comment ?	

Évaluation sommative des élèves

Préalables

- Y a-t-il concordance entre les intentions pédagogiques, les compétences à acquérir, les objectifs spécifiques et les productions des élèves ?
- La différenciation a-t-elle portée sur
 - . les objectifs ?
 - . les tâches ?
 - . le temps alloué ?
 - . les phases d'activité ?
 - . les niveaux de difficulté ?
 - . les valeurs des variables didactiques ?
 - . la quantité d'informations ?
 - . L'évaluation sera-t-elle elle-même différenciée ? Si oui, comment ?
- Les interventions de l'enseignant quant à la résolution du problème ont-elles été neutres, plutôt suggestives ? La solution a-t-elle été donnée ?
- Les circonstances réelles de la situation ne permettaient-elles d'atteindre que certains aspects de la compétence ?
- S'agissait-il d'une situation d'apprentissage, d'un exercice de consolidation, d'une situation de transfert ? Pour tous les élèves, pour certains élèves ?
- Que peut-on évaluer ? L'organisation interne de la procédure était-elle cognitive, non cognitive ?
- La place dans la progression permet-elle une évaluation immédiate ? Que sera la fonction de cette évaluation ? prédictive ? diagnostique ? intermédiaire ? sommative ? Pour quels élèves ?
- Sera-t-elle critériée (pourcentage de réussite des objectifs pour chaque élève, évaluation des progrès d'un élève par rapport à lui-même) ?
- Quelles seront les modalités ?

L. ROYE

Réajustement éventuel de l'action didactique

Compte tenu de l'observation des élèves au cours du processus d'apprentissage, du résultat final évalué et de l'auto-évaluation du travail didactique de l'enseignant un ajustement est-il nécessaire ? Sur quels points ? Quelles parties du contenu les élèves devront-ils consolider plus particulièrement ?

Louis ROYE
IUFM Nord-Pas de Calais